8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на интервале $(a;\ b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$, где $x \in (a;\ b)$, то функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$. Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупность первообразных $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Приведем *основные правила интегрирования*:

1) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C,$
   $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) - f(x)dx;$
2) $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$
3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a = \text{const});$
4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

при условии, что a, b — постоянные числа, $a \neq 0$;

5) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т. е. $(F(x)+C)' = f(x)$.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить *таблицу основных неопределенных интегралов*:

1) $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1);$ $+ C$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

4) $\int e^{u}du = e^{u} + C;$

5) $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

7) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0);$

8) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a \neq 0);$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \ (a > 0);$

11) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

12) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

13) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u \right| + C;$

14) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u \right| + C;$

15) $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C;$

16) $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C;$

17) $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

18) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Интегралы 1—18 называются *табличными*.

Отметим, что в приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$ аргумента x.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx$.

▶ $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{2/3} dx + 2\int x^{-3} dx + \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C.$ ◀

Пример 2. Найти $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

▶ $$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$ ◀

Пример 3. Найти $\int 3^x e^{2x} dx$.

▶ $\int 3^x e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C.$ ◀

Пример 4. Найти $\int (2x-7)^9 dx$.

▶ $\int (2x-7)^9 dx = \frac{1}{2}\int (2x-7)^9 \cdot 2dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-7)^{10}}{10} + C = \frac{1}{20} \times$
$\times (2x-7)^{10} + C$. ◀

Пример 5. Найти $\int \cos(7x-3)dx$.

▶ $\int \cos(7x-3)dx = \frac{1}{7}\int \cos(7x-3)d(7x-3) = \frac{1}{7}\sin(7x -$
$- 3) + C$. ◀

Пример 6. Найти $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

▶ $$\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + $$
$$+ C. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\int \operatorname{ctg} 3x dx$.

▶ $$\int \operatorname{ctg} 3x dx = \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{\cos 3x \cdot 3dx}{\sin 3x} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C. \blacktriangleleft$$

Для того чтобы в примерах 4—7 применить правило 5, некоторые сомножители подынтегральной функции мы «подводили» под знак дифференциала, после чего использовали подходящий табличный интеграл. Такое преобразование называется *подведением под знак дифференциала*. Так, например, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx$.

▶ $$\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{4+\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x}{4+\sin^2 x} d(\sin x) =$$
$$= \int \frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x} = \ln(4+\sin^2 x) + C. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$.

▶ $$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx = \ln\sqrt{x^2+4x+5} +$$
$$+ C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.1

Найти указанные интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1. $\int\left(5x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)dx.$ 2. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx.$

3. $\int\left(3\sin x+2^x\cdot 3^{2x}-\frac{1}{9+x^2}\right)dx.$

4. $\int\sqrt[7]{(5x+3)^3}\,dx.$ 5. $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}\,dx.$

6. $\int\left(\sin 7x-e^{3-2x}+\frac{1}{\cos^2 4x}\right)dx.$

7. $\int\left(e^{-3x}-\frac{1}{3x+2}+3^{2x}-\sin^3 x\cos x\right)dx.$

8. $\int \operatorname{tg} 3x dx.$ 9. $\int\frac{\sqrt{\arcsin x}-x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

10. $\int\frac{x-x^3}{\sqrt{9-x^4}}dx.$ 11. $\int\frac{3^x}{\sqrt{9-9^x}}dx.$ 12. $\int\frac{x-3}{1-x^2}dx.$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1. а) $\int(3x-\sqrt[7]{x^5}+2\sin x-3)\,dx;$

б) $\int(\sin 3x+x\sqrt{1+x^2})\,dx;$ в) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx.$

2. а) $\int\left(x^7-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2^x\right)dx;$

б) $\int\left(x^2\sqrt[3]{4-x^2}+\frac{1}{\sin^2 4x}\right)dx;$ в) $\int\frac{x+1}{x^2+2x-3}dx.$

3. а) $\int\left(x^{-2}+7x^6-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx;$

б) $\int\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}-\cos^7 x\sin x\right)dx;$ в) $\int\operatorname{ctg}(3x-2)dx.$

8.2. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путем алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$ или подведения части ее множителей под знак дифференциала.

Пример 1. Найти $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x+3}{x+5} dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x+3}{x+5} dx = \int \frac{x+5-2}{x+5} dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{2}{x+5} dx = x - 2\int \frac{d(x+5)}{x+5} =$$

$$= x - 2\ln |x+5| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 4} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \int \frac{d(x-2)}{4 + (x-2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \blacktriangleleft$$

Для отыскания интегралов вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

используют следующие формулы:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin (m+n)x + \sin (m-n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos (m-n)x - \cos (m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos (m-n)x + \cos (m+n)x).$$

Пример 4. Найти $\int \cos (2x-1) \cos (3x+5) dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos (2x-1) \cos (3x+5) dx = \frac{1}{2} \int (\cos (x+6) + \cos (5x+4)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos (x+6) d(x+6) + \frac{1}{10} \int \cos (5x+4) d(5x+4) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin (x+6) + \frac{1}{10} \sin (5x+4) + C. \blacktriangleleft$$

При нахождении интегралов вида

$$\int \cos^m x \sin^n x dx \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

возможны следующие случаи:

1) одно из чисел m или n — нечетное, например $m = 2k+1$. Тогда

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = \int \cos^{2k} x \sin^n x \cos x dx =$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^{2k} \sin^n x d(\sin x),$$

т. е. получили интегралы от степенных функций;

2) оба числа m и n — четные. Тогда рекомендуется использовать следующие формулы, позволяющие понизить степень тригонометрических функций:

$$2\cos^2 \alpha x = 1 + \cos 2\alpha x, \quad 2\sin^2 \alpha x = 1 - \cos^2 2\alpha x \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Пример 5. Найти $\int \cos^7 x \sin^3 x dx$.

▶ $$\int \cos^7 x \sin^3 x dx = \int \cos^7 x \sin^2 x \sin x dx =$$
$$= -\int \cos^7 x(1 - \cos^2 x) d(\cos x) = -\int \cos^7 x d(\cos x) +$$
$$+ \int \cos^9 x d(\cos x) = -\frac{1}{8}\cos^8 x + \frac{1}{10}\cos^{10} x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\int \cos^2 3x dx$.

▶ $$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\int \cos 6x d(6x) =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\int \frac{dx}{5 - 4x - x^2}$.

▶ Для отыскания данного интеграла в знамеиателе подынтегральной функции выделим полный квадрат. В результате получим

$$\int \frac{dx}{5 - 4x - x^2} = \int \frac{dx}{9 - (x^2 + 4x + 4)} = \int \frac{d(x + 2)}{9 - (x + 2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{x + 2 + 3}{x + 2 - 3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x + 5}{x - 1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 4} dx$.

▶ Воспользовавшись правилом деления многочлена на многочлен, будем делить числитель подынтегральной функции на ее знаменатель до получения остатка, степень которого меньше степени знаменателя. Это позволит представить подынтегральную функцию в виде суммы целого многочлена и некоторой правильной дроби. Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 4} dx = \int \left(x^3 - 4x + \frac{16x + 1}{x^2 + 4}\right) dx = \int (x^3 - 4x) dx + 8\int \frac{2x dx}{x^2 + 4} +$$
$$+ \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.2

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int (e^{2x} + e^{-2x}) dx$. **2.** $\int \sqrt[6]{1 - 7x^3}\, x^2 dx$.

3. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4 + x^2}} dx$. **4.** $\int \cos^3 2x \sin^4 2x dx$.

5. $\int \cos^2 3x \cdot \sin^2 3x dx$.

6. $\int \operatorname{ctg}^3 2x dx$.

7. $\int \frac{x^2-9}{x^2+9} dx$.

8. $\int \sin 7x \cdot \sin 9x dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

10. $\int \frac{dx}{x^2-6x+7}$.

11. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 3x} dx$.

12. $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$.

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; б) $\int \cos 2x \cdot \sin 10x dx$;

в) $\int \operatorname{tg}^2 7x dx$.

2. а) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$; б) $\int \sin(7x-1) \sin 5x dx$;

в) $\int \frac{3x+2}{x^2+9} dx$.

3. а) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; б) $\int \sin^3(1-3x) dx$;

в) $\int \frac{x+3}{x+1} dx$.

8.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx. \tag{8.1}$$

Если $A \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $2x+b$, равное производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. Тогда в результате простых преобразований получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+b)+(2B/A-b)}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx +$$
$$+ (B - Ab/2) \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{A}{2} \ln |x^2+bx+c| +$$
$$+ (B - Ab/2) \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

Для отыскания последнего интеграла выделим в квадратном трехчлене полный квадрат, т. е. представим трехчлен в виде

$$x^2+bx+c = (x+b/2)^2 + c - b^2/4$$

и в зависимости от знака выражения $c - b^2/4$ получим один из табличных интегралов вида $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx$.

$$▶ \int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4-4/3}{x^2+4x+13}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - 8\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+13| -$$
$$- 8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C. ◀$$

Пример 2. Найти $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx$.

$$▶ \int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-8+8-14/5}{x^2-8x+7}dx =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+7}dx + 13\int \frac{dx}{x^2-2\cdot 4x+16-9} = \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| +$$
$$+ 13\int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| + 13\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right| + C =$$
$$= \frac{5}{2}\ln|x^2-8x+7| + \frac{13}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C. ◀$$

Замечание. Если в интеграле (8.1) квадратный трехчлен имеет вид ax^2+bx+c $(a \neq 0)$, то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе выносят за скобки: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Пример 3. Найти $\int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx$.

$$▶ \int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{4x-3}{x^2-6x+5}dx =$$
$$= -\int \frac{2x-6+6-3/2}{x^2-6x+5}dx = -\int \frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx -$$
$$- \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = -\ln|x^2-6x+5| + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x-3}{2-x+3}\right| + C. ◀$$

Методы нахождения интеграла вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

аналогичны рассмотренным выше, однако в результате получаются другие табличные интегралы. При $A \neq 0$ имеем

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Тогда при $c \neq \frac{b^2}{4a}$ и $a>0$ последний интеграл можно привести к виду

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm q^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm q^2}\right|+C,$$

а при $c>\frac{b^2}{4a}$ и $a<0$ — к виду

$$\int\frac{du}{\sqrt{q^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{q}+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx.$

$$\blacktriangleright \int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)+(4-2/3)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx-5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=3\sqrt{x^2-4x+8}-$$

$$-5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. $\int\frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx.$

$$\blacktriangleright \int\frac{4x-5}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx=-2\int\frac{-2x+2+5/2-2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx=$$

$$=-2\int\frac{-2x+2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=-4\sqrt{-x^2+2x+3}-$$

$$-\arcsin\frac{x-1}{2}+C. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx, \tag{8.2}$$

где k — целое, $k>0$; $p^2-4q<0$. При $A\neq 0$ $(k=1)$ по аналогии со случаем (8.1) выделим интеграл

$$\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C\ (k\neq 1).$$

Тогда задача отыскания интегралов вида (8.2) сводится к нахождению интеграла

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^k}=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}, \tag{8.3}$$

где $u=x+p/2$; $a=\sqrt{(4q-p^2)/4}$; $4q-p^2>0$.

Интегралы вида (8.3) находят с помощью *рекуррентной формулы понижения степени знаменателя:*

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}. \tag{8.4}$$

Пример 6. Найти $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$.

$$▶ \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2-2+10/3}{(x^2+2x+5)^2}dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)^2} + 2 \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} \overset{(8.4)}{=\!=} -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+5} +$$

$$+ 2\left(\frac{x+1}{8((x+1)^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}\right) = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+5} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. ◀$$

Запись $\overset{(8.4)}{=\!=}$ означает, что при переходе к последующим вычисленням использоваиа формула (8.4). (Подобиая краткая и удобиая запись будет встречаться и в дальнейшем.)

АЗ-8.3

Найти указанные определенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.\right)$

2. $\int \frac{3x-7}{x^2+x+1}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3. $\int \frac{x-2}{x^2-8x+7}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x^2-8x+7| + \frac{11}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C.\right)$

4. $\int \frac{x^3+3x}{x^2+2x+2}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{5}{2}\ln|x^2+2x+2| - 9\operatorname{arctg}(x-1) + C.\right)$

5. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3\sqrt{x^2-6x+18} + 5\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+18}| + C.\right)$

6. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$. $\Big($*Ответ:* $-8\sqrt{5+2x-x^2}-$
$-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.\Big)$

7. $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+10)^2}dx$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{4x+13}{x^2+2x+10}+$
$+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.\Big)$

8. $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4+x^2}}dx$. (*Ответ:* $2\ln|x+\sqrt{4+x^2}|-$
$-3\sqrt{4+x^2}+C.$)

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы

1. а) $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12}dx$; б) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

2. а) $\int \frac{x-7}{x^2-10x+9}dx$; б) $\int \frac{7x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

3. а) $\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9}dx$; б) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx$.

8.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ПОДСТАНОВКОЙ)

Если функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{8.5}$$

затем найти интеграл из правой части формулы (8.5) (если это возможно) и вернуться к исходной переменной x. Такой способ нахождения интеграла называется *методом замены переменной* или *методом подстановки*.

Отметим, что при замене $x=\varphi(t)$ должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями D_t и D_x определения функций $\varphi(t)$ и $f(x)$, такое, чтобы функция $\varphi(t)$ принимала все значения $x\in D_x$ (оно обозначается $D_t\leftrightarrow D_x$).

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$.

▶ Введем новую переменную t по формуле $t=\sqrt{x-1}$. Тогда $x=t^2+1$, $dx=2tdt$, D_t: $0\leqslant 1<\infty$, D_x: $1\leqslant x<\infty$, $D_t\leftrightarrow D_x$ и, согласно формуле (8.5), имеем

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int(t^2+1)t\cdot 2t\,dt=2\int(t^4+t^2)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+$$
$$+C=\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx.$

▶ Воспользуемся подстановкой $x=\varphi(t)=a\,\mathrm{tg}\,t$, где область определения D_t: $-\pi/2<t<\pi/2$ удовлетворяет следующим условиям: $D_t\leftrightarrow D_x$: $(-\infty,\ +\infty)$ и в D_t производная $\varphi'(t)$ непрерывна. Тогда $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$ и, согласно формуле (8.5), имеем

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\,t+a^2}}{a^2\,\mathrm{tg}^2\,t}\,\frac{a\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}}{\sin^2 t}dt=$$
$$=\int\frac{1}{\cos t\sin^2 t}dt=\int\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos t\sin^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt+$$
$$+\int\frac{1}{\cos t}dt=-\frac{1}{\sin t}+\ln\left|\mathrm{tg}\,t+\frac{1}{\cos t}\right|+C=-\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}}{\mathrm{tg}\,t}+$$
$$+\ln\left|\mathrm{tg}\,t+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}\right|+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

▶ Применим тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$. Тогда $dx=a\cos t\,dt$, D_t: $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$, D_x: $-a\leqslant x\leqslant a$, $D_t\leftrightarrow D_x$ и

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\overset{(8.5)}{=}\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt=a^2\int|\cos t|\cos t\,dt=$$
$$=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

В полученном выражении перейдем к переменной x, использовав равенства $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2/a^2}$. В результате имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \blacktriangleleft$$

При интегрировании некоторых функций часто целесообразно осуществлять переход к новой переменной с помощью подстановки $t=\psi(x)$, а не $x=\varphi(t)$.

Пример 4. Найти $\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos x\,dx.$

▶ Применим подстановку $1+\sin x=t$. Тогда $\cos x\,dx=dt$ и

$$\int\sqrt[3]{1+\sin x}\cos x\,dx=\int t^{1/3}dt=\frac{t^{4/3}}{4/3}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\int e^{-x^3}x^2dx$.

▶ Воспользуемся подстановкой $-x^3=t$. Тогда имеем $-3x^2dt = dt$, $x^2dx = -\frac{1}{3}dt$ и

$$\int e^{-x^3}x^2dx = \int e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$.

▶ В этом случае целесообразно применить подстановку $t = \frac{1}{x+1}$. Тогда $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ и

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-1\right)+10}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{t^{-2}+9}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{9t^2+1}} = -\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1} + \sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Замечание. Для нахождения неопределенных интегралов методом замены переменной (методом подстановки) предлагается схема вычислений, которая дает возможность компактно и последовательно изложить ход решения задачи. Воспользуемся этой схемой при решении уже рассмотренного примера 3:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt =$$

$$= a^2\int |\cos t| \cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \left| \begin{matrix} t = \arcsin\frac{x}{a}, \ \sin t = \frac{x}{a}, \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2/a^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a}{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C. \blacktriangleleft$$

Здесь и далее при записи решений примеров, в которых используются методы замены переменной и интегрирования по частям, все промежуточные выкладки мы будем заключать между вертикальными линиями.

АЗ-8.4

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$. (*Ответ:* $2(\sqrt{x+3}-\ln|1+\sqrt{x+3}|)+C.$)

2. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{24}\sqrt[5]{(5x^2-3)^{12}}+C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.\right)$

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{1+\ln x}-\ln\ln x+$
$+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C.$)

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. (*Ответ:* $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4(1+\sqrt[4]{x})+C.$)

6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } -\ln\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}+C.\right)$

7. $\int\sqrt{144-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 72\arcsin\frac{x}{12}+\right.$
$\left.+\frac{x}{2}\sqrt{144-x^2}+C.\right)$

8. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}\right)$.

9. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$. (*Ответ:* $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}.$)

10. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$?. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $x^3\sqrt{4-3x^4}\,dx$; б) $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \text{а) } -\frac{1}{8}\sqrt{(4-3x^4)^3}+C;\ \text{б) } \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-\right.$
$\left.-4\ln(1+\sqrt{x})^8+C.\right)$

2. а) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{9-2x^3}}dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

$\left(\text{Ответ: а) } -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(9-2x^3)^2}+C;\text{ б) } -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+ \right.$
$\left. +C.\right)$

3. а) $\int\sqrt[7]{1+\cos^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

$\left(\text{Ответ: а) } -\frac{7}{8}\sqrt{(1+\cos^2 x)^8}+C;\text{ б) } C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}- \right.$
$\left. -\arcsin x.\right)$

8.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{8.6}$$

где $u(x)$, $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Формула (8.6) называется *формулой интегрирования по частям*. Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу (8.6) необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется использовать для нахождения интегралов от функций $x^k\sin\alpha x$, $x^k\cos\alpha x$, $x^k e^{\alpha x}$, $x^n\ln^k x$, $x^k\operatorname{ch}\alpha x$, $a^{\beta x}\sin\alpha x$, $a^{\beta x}\cos\alpha x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д., где n, k — целые положительные постоянные, α, $\beta\in\mathbf{R}$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Пример 1. Найти $\int xe^{-2x}dx$.

▶ Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{-2x}dx$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$ (всегда можно считать, что $C=0$). Следовательно, по формуле (8.6) имеем

$$\int xe^{-2x}dx \overset{(8.6)}{=} x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int(x^2+2x)\cos 2x dx$.

$$\blacktriangleright \int(x^2+2x)\cos 2x dx =$$
$$= \left|\begin{array}{c} u=x^2+2x,\ du=(2x+2)\,dx, \\ dv=\cos 2x dx,\ v=\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right| \overset{(8.6)}{=}$$
$$\overset{(8.6)}{=} \frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x-\int(x+1)\sin 2x dx =$$
$$= \left|\begin{array}{l} u=x+1,\ du=dx, \\ dv=\sin 2x dx, \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x-\left(-(x+1)\frac{1}{2}\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\blacktriangleright \int x \operatorname{arctg} x dx=\left|\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg} x,\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=x dx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2 dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $\int e^{2x}\sin x dx$.

$$\blacktriangleright \int e^{2x}\sin x dx=\left|\begin{array}{l} u=\sin x,\ du=\cos x dx, \\ dv=e^{2x}dx,\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx=\left|\begin{array}{l} u=\cos x,\ du=-\sin x dx, \\ dv=e^{2x}dx,\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\sin x dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x dx.$$

Перенеся последиий интеграл в левую часть равенства, получим

$$\frac{3}{4}\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{3}{4}C.$$

Следовательио,

$$\int e^{2x}\sin x dx=\frac{2}{3}e^{2x}\sin x-\frac{1}{3}e^{2x}\cos x+C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\int x^2\ln^2 x dx$.

$$\blacktriangleright \int x^2\ln^2 x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx, \\ dv=x^2dx,\ v=x^3/3 \end{array}\right|=$$
$$=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int x^3\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{3}\int x^2\ln x dx=$$
$$=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=dx/x, \\ dv=x^2dx,\ v=x^3/3 \end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx\right)=\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{9}\int x^2dx=$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln^2 x-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2}{27}x^3+C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.5

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int x\cos 3x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.\right)$
2. $\int \arccos x dx$. (*Ответ:* $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.)
3. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $-e^{-x}(x^2+5)+C$.)
4. $\int \ln^2 x dx$. (Ответ: $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.)
5. $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\right)$
6. $\int x^3e^{-x^2}dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C.\right)$
7. $\int e^{\sqrt{x}}dx$. (*Ответ:* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.)
8. $\int \sin(\ln x)dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int xe^{-7x}dx$;
в) $\int x\arcsin x dx$.
2. а) $\int xe^{11x+1}dx$; б) $\int\ln(1+x^2)dx$;
в) $\int x\cos(x/2+1)dx$.
3. а) $\int\ln(x-3)dx$; б) $\int x\cos(2x-1)dx$;
в) $\int x\cdot 2^{3x}dx$.

8.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}, \quad (8.7)$$

где m, n — целые положительные числа; b_i, $a_j \in \mathbf{R}$; $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$,

Если $m < n$, то $R(x)$ называется *правильной дробью*, если $m \geqslant n$,— *неправильной дробью*.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

где $M_{n-m}(x)$, $Q_l(x)$ — многочлены; $\dfrac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ — правильная дробь; $l < n$.

Например, $\dfrac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ — неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1} = x^2 - 3x + 10 + \frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции $R(x)$ при условии $m < n$.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

где A, a, M, N, p, q — постоянные числа; k — целое, $k \geqslant 2$; $p^2 - 4q < 0$.

Очевидно, что интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C.$$

Методика нахождения интегралов от простейших дробей третьего и четвертого типов рассмотрена в § 8.4. Таким образом, всякая простейшая рациональная дробь может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Известно, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}(x^2+p_1x+ \\ + q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}, \tag{8.8}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_\beta$ — действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1, \ldots, k_\beta$, а $p_\gamma^2 - 4q_\gamma < 0$ $(\gamma = \overline{1, s})$; $k_1 + \ldots + k_\beta + 2t_1 + \ldots + 2t_s = n$; числа $k_1, \ldots, k_\beta$, $t_1, \ldots, t_s$ — целые неотрицательные. Тогда верна

Теорема (о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей). *Всякую правильную рациональную дробь (8.7) со знаменателем, представленным в виде (8.8), можно разложить в сумму простейших* *рациональных дробей типа 1—4. В данном разложении каждому корню α_r кратности k_r $(r=\overline{1,\ \beta})$ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x-\alpha_r)^{k_r}$) соответствует сумма k_r дробей вида*

$$\frac{A_1}{x-\alpha_r}+\frac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\ldots+\frac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}. \tag{8.9}$$

Каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности t_γ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}$) соответствует сумма t_γ элементарных дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2}+\ldots+\frac{M_{t_\gamma}x+N_{t_\gamma}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}}. \tag{8.10}$$

Для вычисления значений A, M, N в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют *метод неопределенных коэффициентов*, суть которого заключается в следующем. С учетом формул (8.9), (8.10) данную дробь $R(x)$ представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами A, M, N. Полученное равенство является тождеством. Поэтому, если привести все дроби к общему знаменателю $P_n(x)$ в числителе получим многочлен $Q^*_{n-1}(x)$ степени $n-1$, тождественно равный многочлену $Q_m(x)$, стоящему в числителе выражения (8.7). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в этих многочленах, получим систему n уравнений для определения n неизвестных коэффициентов A, M, N (с индексами).

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $Q^*_{n-1}(x)$ тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях x. Придавая x конкретные числовые значения получаем систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется *методом частных значений*. Если значения x совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

Пример 1. Найти $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$.

▶ В соответствии с формулой (8.9) разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\int\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx\overset{(8.9)}{=}\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx. \tag{1}$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадет со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральных функций в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, т. е.

$$2x-3\equiv A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+C(x-1)x. \tag{2}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 \;= A+B+C, \\ x^1 & 2 \;= -3A-2B-C, \\ x^0 & -3=2A, \end{array}\right\}$$

решение которой: $A=-3/2$, $B=1$, $C=1/2$.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в тождество (2) вместо x частные значения, равные корням знаменателя $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$. Получим равенства $-3=$

$=2A$, $-1=-B$, $1=2C$, откуда следует, что $A=-3/2$, $B=1$, $C=1/2$. Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}\right)dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C^*,$$

где C^* — произвольная постоянная интегрирования. ◀

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

▶ На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} \overset{(8.9)}{=} \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)}\right)dx.$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1). \tag{1}$$

При $x=1$ и $x=-1$ находим, что $4A=1$, $-1=-2B$, т. е. $A = 1/4$, $B=1/2$.

Для вычисления значения C приравняем в тождестве (1) коэффициенты при x^2. Получим $0=A+C$, т. е. $C=-1/4$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{-1/4}{x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C^* =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + C^*. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$.

▶ Согласно формулам (8.9), (8.10), разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей; выполнив приведение к общему знаменателю, получим

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Следовательно,

$$x \equiv A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1).$$

При $x=1$ получаем $1=2A$, т. е. $A=1/2$. Далее,

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+M=0, \\ x_0 & A-N=0, \end{array}\right\}$$

откуда $M=-1/2$, $N=1/2$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $I(x) = \int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}\,dx.$

▶ В данном случае подынтегральная функция является иеправильной дробью. Путем деления числнтеля на знаменатель выделим целую часть рацнональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x - 2 + \frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Следовательно, с учетом формул (8.9) и (8.10)

$$I(x) = \int (x-2)\,dx + \int \frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}\,dx = \frac{(x-2)^2}{2} +$$

$$+ \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5} \right) dx.$$

Приведя к общему знаменателю дробн в последнем ннтеграле н приравняв числители подынтегральных дробей в левой и правой частях запнсанного равенства, получим

$$2x^2 + 10x - 5 \equiv A(x^2+2x+5) + Mx^2 + Nx.$$

Приравнивая коэффицненты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 2 = A + M, \\ x^1 & 10 = 2A + N, \\ x^0 & -5 = 5A, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1$, $M = 3$, $N = 12$.

Окончательно получаем

$$I(x) = \frac{(x-2)^2}{2} + \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{3x+12}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{(x-2)^2}{2} -$$

$$- \ln|x| + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| +$$

$$+ \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 9\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| +$$

$$+ \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.6

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx.$ (*Ответ:* $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|} + C.$)

2. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4+\right.$
$\left.+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.\right)$

3. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.\right)$

4. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{x-1}+\right.$
$\left.+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C.\right)$

5. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\right.$
$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.\right)$

6. $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C.\right)$

7. $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\right.$
$\left.+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)}$.

$\left(\textit{Ответ: } \text{а) } \frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C;\ \text{б) } \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|}+C.\right)$

2. а) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

$\left(\textit{Ответ: } \text{а) } \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C;\ \text{б) } \frac{1}{x+1}+\right.$
$\left.+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.\right)$

3. а) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$; б) $\int \frac{13dx}{x(x^2+6x+13)}$.

$\left(\textit{Ответ:}\text{ а) } \ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}+C, \text{ б) } \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+6x+13}}+\right.$

$\left.+5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C\right)$

8.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Не для всякой иррациональной функции можно найти первообразную в виде элементарной функции Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1/s_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\nu/s_\nu}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, a, b, c, d — постоянные, r_i, s_i — целые положительные числа, $i=\overline{1, \nu}$, приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=u^m$$

(здесь число m — наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1}$, .., $\frac{r_\nu}{s_\nu}$, т е $m=\text{НОК}\,(s_1, \ldots, s_\nu)$.

В частности, интеграл вида

$$\int R(x, x^{r_1/s_1}, \ldots, x^{r_\nu/s_\nu})dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки $x=u^m$

Пример 1. Найти $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$

▶ Так как НОК(2, 4) = 4, то

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}=\int\frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+4}=\left|\begin{matrix}x=u^4\\ dx=4u^3du\end{matrix}\right|=$$

$$=4\int\frac{u^2}{u^3+4}u^3du=4\int\frac{u^5du}{u^3+4}=4\int\left(u^3-\frac{4u^2}{u^3+4}\right)du=\frac{4}{3}u^3-$$

$$-\frac{16}{3}\ln|u^3+4|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{16}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+4|+C,$$

поскольку $u=\sqrt[4]{x}$ ◀

Пример 2. Найти $\int\frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

▶ Так как НОК(2, 3, 6) = 6, то

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left|\begin{matrix} x+1=u^6, \\ dx=6u^5du \end{matrix}\right| = \int \frac{u}{u^3+u^2}\,6u^5du =$$

$$= 6\int \frac{u^4}{u+1}\,du = 6\int\left(u^3-u^2+u-1+\frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\ln|u+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+\right.$$
$$\left. +1\right| + C. \blacktriangleleft$$

Интегрирование некоторых функций, рационально зависящих от $\sqrt{ax^2+bx+c}$, описано в § 8.3, 8.4.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Оказывается, что данный интеграл всегда можно представить в виде

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} +$$
$$+ \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (8.11)$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$; $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, которые находят следующим образом. Дифференцируем равенство (8.11), в результате получаем тождество, из которого определяем коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 3. Найти $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

▶ Согласно формуле (8.11), имеем

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} +$$
$$+ (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на $\sqrt{x^2+4}$. Тогда

$$x^4+4x^2 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+4) + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)x + \lambda.$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффицнентов, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & 1 = 3A + A, \\ x^3 & 0 = 2B + B, \\ x^2 & 4 = 12A + C + B, \\ x^1 & 0 = 4B + D, \\ x^0 & 0 = 4C + \lambda, \end{array}\right\}$$

решение которой: $A = 1/4$, $B = 0$, $C = 1/2$, $D = 0$, $\lambda = -2$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{x^3 + 2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C^*. \blacktriangleleft$$

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

где a, b — постоянные, отличные от нуля, m, n, p — рациональные числа, можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева в следующих трех случаях:

1) если p — целое число, то имеем рассмотренный выше случай интегрирования простейших иррациональных функций;

2) если $(m+1)/n$ — целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = u^s$, $p = r/s$, $s > 0$;

3) если $(m+1)/n + p$ — целое число, то используется подстановка $a + bx^n = u^s x^n$.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$.

$\blacktriangleright$ Так как $m = -7$, $n = 4$, $p = -1/2$, то $(m+1)/n + p = -3/2 - 1/2 = -2$ — целое число. Имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}} = \left| \begin{array}{c} 1 + x^4 = u^2x^4,\ x = (u^2-1)^{-1/4}, \\ dx = -\dfrac{1}{2}(u^2-1)^{-5/4}u\,du \end{array} \right| =$$

$$= \int (u^2-1)^{7/4}u^{-1}(u^2-1)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(u^2-1)^{-5/4}u\,du =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (u^2-1)\,du = -\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u + C = \left| u = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^2}\right)\sqrt{1+x^4} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.7

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{2}{3}\ln\left|3\sqrt{x} + 4\right| + C.\right)$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \dfrac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} + \dfrac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right| + C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[4]{3x+4}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{3x+4}-$

$-2\sqrt[4]{3x+4}+4\ln\big(\sqrt[4]{3x+4}+2\big)\Big)+C.\Big)$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}}$. $\Big($*Ответ:* $4\Big(\frac{1}{2}\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x}+49\ln|\sqrt[4]{x}-$

$-7|\Big)+C.\Big)$

5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$. $\Big($*Ответ:* $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+$

$+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.\Big)$

6. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-$

$-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.\Big)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

$\Big($*Ответ:* а) $\frac{4}{3}\big(\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\big)+C$;

б) $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C.\Big)$

2. а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

$\Big($*Ответ:* а) $\frac{2}{9}\sqrt[4]{x^9}-\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$; б) $3\sqrt[3]{x+1}-4(x+1)+$
$+C.\Big)$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}$.

$\Big($*Ответ:* а) $6\Big(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln\big(1+\sqrt[6]{x}\big)\Big)+C$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-8)^4}+\frac{8}{9}(3x-8)+C.\Big)$

8.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интегралы вида

$$\int R(\cos x,\ \sin x)dx, \qquad (8.12)$$

где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью *универсальной подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$. В этом случае

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ dx=\frac{2du}{1+u^2} \qquad (8.13)$$

(см. § 8.6).

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

▶ Полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$. Тогда, согласно равенствам (8.13),

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{2du/(1+u^2)}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{du}{1+u}=$$

$$=\ln|1+u|+C=\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C. \ ◀$$

В случае, когда имеет место тождество

$$R(-\cos x,\ -\sin x)\equiv R(\cos x,\ \sin x),$$

для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощенную подстановку* $\operatorname{tg}x=u$. При этом

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ dx=\frac{du}{1+u^2}. \qquad (8.14)$$

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

▶ Положив $\operatorname{tg}x=u$, согласно формуле (8.14), получим

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)}=\int\frac{du}{3+4u^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C. \ ◀$$

Пример 3. Найти $\int\operatorname{tg}^5 2xdx$.

▶ Применим подстановку $\operatorname{tg}2x=u$. Тогда:

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u,\ dx=\frac{1}{2}\ \frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int\operatorname{tg}^5 2xdx=\frac{1}{2}\int u^5\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\int\left(u^3-u+\frac{u}{1+u^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{8}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+C=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+$$

$$+\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)+C. \ ◀$$

При нахождении интегралов вида

$$\int f(\cos x)\sin x dx \text{ и } \int f(\sin x)\cos x dx \tag{8.15}$$

целесообразно применять подстановки

$$\cos x = t \text{ и } \sin x = t \tag{8.16}$$

соответственно.

Пример 4. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

▶ Положим, $\cos x = t$, тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4}(-dt) = -\int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $I = \int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}}$.

▶ Положим, $2 + 3\sin 2x = t^3$. Тогда $\cos 2x dx = \frac{1}{2}t^2 dt$ и

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)} + C. \blacktriangleleft$$

АЗ-8.8

Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. $\left(Ответ: \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.\right)$

2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. $\left(Ответ: \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. $\left(Ответ: \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.\right)$

4. $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$. $\left(Ответ: \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + C.\right)$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x}$.

$$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+3-\sqrt{3}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{3}}\right|+C.\right)$$

6. $\int \sin^4 3x dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.\right)$

7. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right|+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C.\right)$

8. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.\right)$

Самостоятельная работа

Найти неопределенные интегралы

1. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \frac{3}{5}\cos^{5/3}x-3\cos^{-1/3}x+C;\right.$

$\left.\text{б)}\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C.\right)$

2. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin 2x}}dx$; б) $\int \frac{\sin x dx}{\sin x+1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \frac{1}{4}\sqrt{3+4\sin 2x}+C;\quad \text{б)}\ \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C.\right)$

3. а) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{(3+2\cos 3x)^2}}$; б) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos^2 x}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \frac{1}{2}\sqrt{3+2\cos 3x}+C;\right.$

$\left.\text{б)}\ \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-x+C.\right)$

ИДЗ-8.1

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1—5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1

1.1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}\,dx.$ 1.2. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}\,dx.$

1.3. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}\,dx.$ 1.4. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1.5. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}\,dx.$ 1.6. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.7. $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx.$ 1.8. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

1.9. $\int \frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}\,dx.$ 1.10. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}\,dx.$

1.11. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}\,dx.$ 1.12. $\int \left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx.$

1.13. $\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx.$ 1.14. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}\,dx.$

1.15. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx.$ 1.16. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}\,dx.$

1.17. $\int \left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx.$ 1.18. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}\,dx.$

1.19. $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}\,dx.$ 1.20. $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}\,dx.$

1.21. $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$ 1.22. $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}\,dx.$

1.23. $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}\,dx.$ 1.24. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx.$

1.25. $\int\left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx.$ 1.26. $\int\frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}dx.$

1.27. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{2}{x^3}+1\right)dx.$ 1.28. $\int\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+6\right)dx.$

1.29. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$ 1.30. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

2.

2.1. $\sqrt{3+x}\,dx.$ 2.2. $\int\sqrt[3]{1+x}\,dx.$

2.3. $\int\sqrt[3]{(1+x)^2}\,dx.$ 2.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

2.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$ 2.6. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}.$

2.7. $\int(1-4x)^7\,dx.$ 2.8. $\int(1+4x)^5\,dx.$

2.9. $\int(1-3x)^4\,dx.$ 2.10. $\int\sqrt{1+3x}\,dx.$

2.11. $\int\sqrt{5-4x}\,dx.$ 2.12. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}.$

2.13. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$ 2.14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$

2.15. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$ 2.16. $\int\sqrt[5]{3-2x}\,dx.$

2.17 $\int\sqrt[4]{1+3x}\,dx.$ 2.18. $\int\sqrt[3]{1+3x}\,dx.$

2.19. $\int\frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$ 2.20. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}.$

2.21. $\int\frac{dx}{(2+x)^3}.$ 2.22. $\int\sqrt[3]{5-2x}\,dx.$

2.23. $\int\sqrt{5-4x}\,dx.$ 2.24. $\int\sqrt[5]{(6-5x)^2}\,dx.$

2.25. $\int\sqrt[4]{2-5x}\,dx.$ 2.26. $\int\sqrt[3]{4-2x}\,dx.$

2.27. $\int\sqrt{3-4x}\,dx.$ 2.28. $\int\sqrt[5]{3+2x}\,dx.$

2.29. $\int\sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx.$ 2.30. $\int\sqrt[3]{(2-x)^2}\,dx.$

3

3.1. $\int \frac{dx}{3-x}$. 3.2. $\int \frac{dx}{3x+9}$. 3.3. $\int \frac{dx}{2-3x}$.

3.4. $\int \frac{dx}{1-4x}$. 3.5. $\int \frac{dx}{2+3x}$. 3.6. $\int \frac{dx}{2-5x}$.

3.7. $\int \frac{dx}{3x-2}$. 3.8. $\int \frac{dx}{2x+3}$. 3.9. $\int \frac{dx}{3x-4}$.

3.10. $\int \frac{dx}{4-3x}$. 3.11. $\int \frac{dx}{3x+4}$. 3.12. $\int \frac{dx}{4x-2}$.

3.13. $\int \frac{dx}{5-3x}$. 3.14. $\int \frac{dx}{4-7x}$. 3.15. $\int \frac{dx}{5x-3}$.

3.16. $\int \frac{dx}{3-2x}$. 3.17. $\int \frac{dx}{5+3x}$. 3.18. $\int \frac{dx}{3-5x}$.

3.19. $\int \frac{dx}{5+4x}$. 3.20. $\int \frac{dx}{6-3x}$. 3.21. $\int \frac{dx}{6+5x}$.

3.22. $\int \frac{dx}{1-7x}$. 3.23. $\int \frac{dx}{1+6x}$. 3.24. $\int \frac{dx}{2+7x}$.

3.25. $\int \frac{dx}{7-3x}$. 3.26. $\int \frac{dx}{5-2x}$. 3.27. $\int \frac{dx}{2x+7}$.

3.28. $\int \frac{dx}{2x+9}$. 3.29. $\int \frac{dx}{7x-3}$. 3.30. $\int \frac{dx}{6x+1}$.

4

4.1. $\int \sin(2-3x)dx$. 4.2. $\int \sin(3-2x)dx$.

4.3. $\int \sin(5-3x)dx$. 4.4. $\int \cos(2+3x)dx$.

4.5. $\int \cos(3+2x)dx$. 4.6. $\int \sin(4-2x)dx$.

4.7. $\int \cos(5-2x)dx$. 4.8. $\int \cos(7x+3)dx$.

4.9. $\int \sin(8x-3)dx$. 4.10. $\int \sin(3+4x)dx$.

4.11. $\int \sin(3-4x)dx$. 4.12. $\int \cos(4x+3)dx$.

4.13. $\int \cos(3-4x)dx$. 4.14. $\int \cos(2+5x)dx$

4.15. $\int \cos(3x+5)dx$. 4.16. $\int \sin(5x-3)dx$.

4.17. $\int \sin(5-3x)dx$. 4.18. $\int \sin(3x+6)dx$.

4.19. $\int \cos(5x-8)dx$. 4.20. $\int \cos(3x-7)dx$.

4.21. $\int \cos(5x-6)dx$. 4.22. $\int \sin(7x+1)dx$.

4.23. $\int \cos(7x+3)dx$. 4.24. $\int \sin(7-4x)dx$.

4.25. $\int \cos(3x-7)dx$. 4.26. $\int \sin(8x-5)dx$.

4.27. $\int \cos(8x-4)dx$. 4.28. $\int \sin(9x-1)dx$.

4.29. $\int \cos(10x-3)dx$. 4.30. $\int \sin(9x+7)dx$

5

5.1. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$. 5.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$. 5.3. $\int \frac{dx}{9x^2+3}$.

5.4. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$. 5.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$. 5.6. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$.

5.7. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$. 5.8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$. 5.9. $\int \frac{dx}{5x^2-3}$.

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. 5.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$. 5.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$.

5.13. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$. 5.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$. 5.15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$. 5.17. $\int \frac{dx}{3x^2+2}$. 5.18. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

5.19. $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$. 5.20. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$. 5.21. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

5.22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$. 5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$. 5.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

5.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$. 5.26. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$. 5.27. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$.

5.28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 5.29. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$. 5.30. $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

6

6.1. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$. 6.2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$. 6.3. $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$.

6.4. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$. 6.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$. 6.6. $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

6.7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$. 6.8. $\int \frac{\sqrt{3}xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$. 6.9. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

6.10. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$. 6.11. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$. 6.12. $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$.

6.13. $\int \frac{2xdx}{3x^2-7}$. 6.14. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$. 6.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

6.16. $\int \frac{xdx}{2x^2+9}$. 6.17. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$. 6.18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

6.19. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$. 6.20. $\int \frac{xdx}{3x^2-6}$. 6.21. $\int \frac{xdx}{5x^2+1}$.

6.22. $\int \frac{5xdx}{5x^2-3}$. 6.23. $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$. 6.24. $\int \frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

6.25. $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}$. 6.26. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$. 6.27. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+5}}$.

6.28. $\int \frac{2xdx}{5x^2-3}$. 6.29. $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$. 6.30. $\int \frac{7xdx}{7x^2+1}$.

7

7.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$. 7.2. $\int \frac{dx}{2x^2-5}$. 7.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$.

7.4. $\int \frac{dx}{5x^2+2}$. 7.5. $\int \frac{dx}{2x^2+3}$. 7.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.

7.7. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. 7.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$. 7.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$.

7.10. $\int \frac{dx}{5x^2-4}$. 7.11. $\int \frac{dx}{3x^2-7}$. 7.12. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$.

7.13. $\int \frac{dx}{6x^2-7}$. 7.14. $\int \frac{dx}{7x^2+6}$. 7.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

7.16. $\int \frac{dx}{6x^2+1}$. 7.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$. 7.18. $\int \frac{dx}{3x^2-5}$.

7.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$. 7.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$. 7.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

7.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$. 7.23. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. 7.24. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$.

7.25. $\int \frac{dx}{3x^2+4}$. 7.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}$. 7.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

7.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. 7.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$. 7.30. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

8

8.1. $\int e^{2x-7}dx$. 8.2. $\int e^{3+5x}dx$. 8.3. $\int e^{2-3x}dx$.
8.4. $\int e^{2x+1}dx$. 8.5. $\int e^{7x-2}dx$. 8.6. $\int e^{5x-7}dx$.
8.7. $\int e^{5x+7}dx$. 8.8. $\int e^{7-2x}dx$. 8.9. $\int e^{3-4x}dx$.
8.10. $\int e^{10x+2}dx$. 8.11. $\int e^{2x-10}dx$. 8.12. $\int e^{4x+3}dx$.
8.13. $\int e^{4x+5}dx$. 8.14. $\int e^{6x-1}dx$. 8.15. $\int e^{5-2x}dx$.
8.16. $\int e^{4-3x}dx$. 8.17. $\int e^{3-5x}dx$. 8.18. $\int e^{1-4x}dx$.
8.19. $\int e^{2-5x}dx$. 8.20. $\int e^{6x-4}dx$. 8.21. $\int e^{8x+1}dx$.
8.22. $\int e^{2-6x}dx$. 8.23. $\int e^{2-4x}dx$. 8.24. $\int e^{3-6x}dx$.
8.25. $\int e^{4-5x}dx$. 8.26. $\int e^{5-x}dx$. 8.27. $\int e^{7+3x}dx$.
8.28. $\int e^{2x+3}dx$. 8.29. $\int e^{8x+1}dx$. 8.30. $\int e^{4-7x}dx$.

9

9.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$. 9.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx$.

9.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$. 9.4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$.

9.5. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$. 9.6. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$.

9.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$. 9.8. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

9.9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$. 9.10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$.

9.11. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$. 9.12. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$.

9.13. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx$. 9.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}$.

9.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx$. 9.16. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$.

9.17. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx.$

9.18. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}.$

9.19. $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}.$

9.20. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx.$

9.21. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{x+4}dx.$

9.22. $\int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx.$

9.23. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx.$

9.24. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx.$

9.25. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}.$

9.26. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8}dx.$

9.27. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx.$

9.28. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}.$

9.29. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9}dx.$

9.30. $\int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5}dx.$

10

10.1. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx.$

10.2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx.$

10.3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx.$

10.4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

10.5. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx.$

10.6. $\int \cos^7 2x \sin 2x dx.$

10.7. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x+2}.$

10.8. $\int \frac{\cos x dx}{3-\sin x}.$

10.9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x+3}}.$

10.10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x+1}}.$

10.11. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}.$

10.12. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx.$

10.13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx.$

10.14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx.$

10.15. $\int \sin^3 4x \cos 4x dx.$

10.16. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx.$

10.17. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx.$

10.18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx.$

10.19. $\int \sin^3 5x \cos 5x dx.$

10.20. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}dx.$

10.21. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x}\,dx.$

10.22. $\int \sqrt{\cos 7x}\,\sin 7x\,dx.$

10.23. $\int \sin^6 3x \cos 3x\,dx.$

10.24. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x}\,dx.$

10.25. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\,\sin 2x\,dx.$

10.26. $\int \sin^4 8x \cos 8x\,dx.$

10.27. $\int \sin^5 4x \cos 4x\,dx.$

10.28. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}\,dx.$

10.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}}\,dx.$

10.30. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x}\,dx.$

11

11.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}\,dx.$

11.2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}.$

11.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}.$

11.4. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}\,dx.$

11.5. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}\,dx.$

11.6. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x}\,dx.$

11.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}\,dx.$

11.8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$

11.9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \operatorname{tg}^4 3x}.$

11.10. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}\,dx.$

11.11. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x}\,dx.$

11.12. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x}\,dx.$

11.13. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}\,dx.$

11.14. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}\,dx.$

11.15. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}\,dx.$

11.16. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{\operatorname{tg} 4x}}.$

11.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \operatorname{ctg}^3 3x}.$

11.18. $\int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x}\,dx.$

11.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$

11.20. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx.$

11.21. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 4x}{\sin^2 4x}\,dx.$

11.22. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 7x}}{\cos^2 7x}\,dx.$

11.23. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x}\,dx.$

11.24. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}\,dx.$

11.25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}.$

11.26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}.$

11.27. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}\,dx.$

11.28. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}\,dx.$

11.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}\,dx.$

11.30. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x}\,dx.$

12

12.1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2}\,dx.$

12.2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12.3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

12.4. $\int \frac{\arccos \operatorname{tg}^3 2x}{1+4x^2}\,dx.$

12.5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

12.6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}.$

12.7. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

12.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2}\,dx.$

12.9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}.$

12.11. $\int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.12. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^7 3x}{1+9x^2}\,dx.$

12.13. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx.$

12.14. $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

12.15. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

12.16. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^7 x}.$

12.17. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

12.18. $\int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2}\,dx.$

12.19. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}\,dx.$

12.20. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$

12.21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^5 x}$.

12.22. $\int \frac{\arccos^7 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

12.23. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

12.24. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{1+25x^2} dx$.

12.25. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$.

12.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$.

12.27. $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2} dx$.

12.28. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$.

12.29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$.

12.30. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$.

13

13.1. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$.

13.2. $\int \frac{xdx}{e^{x^2+3}}$.

13.3. $\int \frac{x^2dx}{e^{x^3+1}}$.

13.4. $\int e^{\cos x} \sin xdx$.

13.5. $\int e^{2x^3-1} x^2 dx$.

13.6. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$.

13.7. $\int e^{7x^2+2} xdx$.

13.8. $\int e^{3-x^2} xdx$.

13.9. $\int e^{4x^2+5} xdx$.

13.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\, e^{\arcsin x}}$.

13.11. $\int e^{5x^2-3} xdx$.

13.12. $\int e^{1-4x^2} xdx$.

13.13. $\int e^{3x^2+4} xdx$.

13.14. $\int e^{\sin x+1} \cos xdx$.

13.15. $e^{4-x^2} xdx$.

13.16. $\int e^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

13.17. $\int e^{3\cos x+2} \sin xdx$.

13.18. $\int e^{4\sin x-1} \cos xdx$.

13.19. $\int e^{5x^2-3} xdx$.

13.20. $\int e^{5-2x^2} xdx$.

13.21. $\int e^{4-3x^2} xdx$.

13.22. $\int e^{\cos 2x} \sin 2xdx$.

13.23. $\int e^{1-6x^2} xdx$.

13.24. $\int e^{x^3+1} x^2 dx$.

13.25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.

13.26. $\int e^{3x^3} x^2 dx$.

13.27. $\int \frac{x^4 dx}{e^{x^5+1}}$.

13.28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$.

13.29. $\int \frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$.

13.30. $e^{4-5x^2} xdx$.

14.1. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}dx.$

14.2. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx.$

14.3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}dx.$

14.4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

14.5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx.$

14.6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}dx.$

14.7. $\int \frac{5+x}{3x^2+1}dx.$

14.8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx.$

14.9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx.$

14.10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+1}dx.$

14.11. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}dx.$

14.12. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx.$

14.13. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}dx.$

14.14. $\int \frac{x-3}{4x^2+1}dx.$

14.15. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}dx.$

14.16. $\int \frac{3x-1}{4-x^2}dx.$

14.17. $\int \frac{5x-2}{x^2+9}dx.$

14.18. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$

14.19. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx.$

14.20. $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx.$

14.21. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

14.22. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}dx.$

14.23. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2}dx.$

14.24. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

14.25. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx.$

14.26. $\int \frac{3-2x}{x^2-8}dx.$

14.27. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}dx.$

14.28. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx.$

14.29. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx.$

14.30. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx.$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1—5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1. $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx.$

▶ Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель и использовав второе и третье правила интегрирования, а также таблицу основных неопределенных интегралов, получим

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$$
$$= 4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} +$$
$$+ \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C.$$

Проверим полученный результат:

$$\left(4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}x^{-1/4} - \frac{8}{19}\times$$
$$\times\frac{19}{4}x^{15/4} + \frac{12}{17}\frac{17}{12}x^{5/12} = 3x^{-1/4} - 2x^{15/4} + x^{5/12}. \blacktriangleleft$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}.$

▶ $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-2/5}dx = -\frac{5}{8\cdot 3}(4-8x)^{3/5} +$$
$$+ C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C.$$

Выполним проверку результата:

$$\left(-\frac{5}{24}(4-8x)^{3/5} + C\right)' = -\frac{5}{24}\frac{3}{5}(4-8x)^{-2/5}(-8) =$$
$$= (4-8x)^{-2/5}. \blacktriangleleft$$

3. $\int \frac{dx}{6-7x}.$

▶ $$\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C.$$

Проверим полученный результат:

$$\left(-\frac{1}{7}\ln|6-7x|+C\right)'=-\frac{1}{7}\frac{1}{6-7x}\cdot(-7)=\frac{1}{6-7x}. \blacktriangleleft$$

4. $\int\cos(2-5x)dx$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int\cos(2-5x)dx=-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C.$

Выполним проверку результата:

$$\left(-\frac{1}{5}\sin(2-5x)+C\right)'=-\frac{1}{5}\cos(2-5x)\cdot(-5)=$$
$$=\cos(2-5x). \blacktriangleleft$$

5. $\displaystyle\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2-(\sqrt{3})^2}}=\frac{3}{2}\ln|2x-\sqrt{4x^2-3}|+C.$

Проверим полученный результат:

$$\left(\frac{3}{2}\ln|2x-\sqrt{4x^2-3}|+C\right)'=\frac{3}{2}\left(\frac{2+\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}}}{2x-\sqrt{4x^2-3}}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{2(\sqrt{4x^2-3}+2x)}{(2x+\sqrt{4x^2-3})\sqrt{4x^2-3}}=\frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}. \blacktriangleleft$$

6. $\displaystyle\int\frac{7xdx}{3x^2+4}$.

$\blacktriangleright$ Преобразуем подынтегральную функцию таким образом, чтобы в числителе получилась производная знаменателя:

$$\int\frac{7xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\int\frac{6xdx}{3x^2+4}=\frac{7}{6}\ln(3x^2+4)+C. \blacktriangleleft$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}+C. \blacktriangleleft$

8. $\int e^{5-4x}dx$.

$\blacktriangleright$ $\displaystyle\int e^{5-4x}dx=-\frac{1}{4}\int e^{5-4x}d(5-4x)=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C. \blacktriangleleft$

9. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx.$

► $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \int \ln^{3/7}(x+2)d(\ln(x+2)) =$

$= \frac{7}{10}\ln^{10/7}(x+2) + C = \frac{7}{10}\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)} + C.$ ◄

10. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}}.$

► $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}}dx = \frac{1}{3}\int (\sin 3x - 4)^{-1/5} 3\cos 3x dx =$

$= \frac{1}{3}\int (\sin 3x - 4)^{-1/5} d(\sin 3x - 4) = \frac{1}{3}\,\frac{5}{4}(\sin 3x - 4)^{4/5} +$

$+ C = \frac{5}{12}\sqrt[5]{(\sin 3x - 4)^4} + C.$ ◄

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 4x}}.$

► $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 4x}} = -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^{-2/3} 4x\left(-\frac{4}{\sin^2 4x}dx\right) =$

$= -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^{-2/3} 4x d(\operatorname{ctg} 4x) = -\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^{1/3} 4x + C =$

$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 4x} + C.$ ◄

12. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}dx.$

► $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^5 2x}}{1+4x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{5/3} 2x\left(-\frac{2}{1+4x^2}\right)dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg}^{5/3} 2x d(\operatorname{arcctg} 2x) = -\frac{1}{2}\,\frac{3}{8}\operatorname{arcctg}^{8/3} 2x +$

$+ C = -\frac{3}{16}\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}^8 2x} + C.$ ◄

13. $\int e^{3\cos x + 2}\sin x dx.$

► $\int e^{3\cos x + 2}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x + 2} d(3\cos x + 2) =$

$= -\frac{1}{3}e^{3\cos x + 2} + C.$ ◄

14. $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx.$

▶ $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{12xdx}{6x^2-4} +$

$+ \frac{10}{\sqrt{6}}\int \frac{dx}{(\sqrt{6}x)^2-2^2} = \frac{1}{4}\ln|6x^2-4| + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right| + C.$ ◀

ИДЗ-8.2

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C.\right)$

1.2. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

$(\textit{Ответ: } 3\arcsin x + 5\sqrt{1-x^2} + C.)$

1.3. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

$(\textit{Ответ: } 8\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - 13\sqrt{x^2-1} + C.)$

1.4. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\ln|2x^2-1| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.\right)$

1.5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } -\sqrt{2-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\right)$

1.6. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\arcsin 2x + \frac{7}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.\right)$

1.7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{5}{\sqrt{2}} \ln \left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}\right| - \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}+C.\right)$

1.8. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2-x^2}+C.\right)$

1.9. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{3}{4} \ln |2x^2+1| + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2}x+C.\right)$

1.10. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 5x - \frac{1}{10} \ln |1+25x^2| + C.\right)$

1.11. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3} \ln |3x^2-4| - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \left|\frac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right| + C.\right)$

1.12. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx.$

$(\text{Ответ: } 5\sqrt{x^2-6} + \ln |x+\sqrt{x^2-6}| + C.)$

1.13. $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{18} \ln |9x^2+7| - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

1.14. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{4-3x^2} + C.\right)$

1.15. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 2\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\right)$

1.16. $\int \frac{5-x}{2+x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + C.\right)$

1.17. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{1+4x^2}| + \frac{3}{4}\sqrt{1+4x^2} + C.\right)$

1.18. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

$(\textit{Ответ:}\ 5\arcsin x + 4\sqrt{1-x^2} + C.)$

1.19. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx.$

$(\textit{Ответ:}\ 5\sqrt{x^2-3} - \ln|x+\sqrt{x^2-3}| + C.)$

1.20. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{3}{8}\ln|4x^2-1| + C.\right)$

1.21. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2| + \right.$

$\left. + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right| + C.\right)$

1.22. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\sqrt{9-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{3} + C.\right)$

1.23. $\int \frac{2x-7}{x^2-5}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x^2-5| - \frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.\right)$

1.24. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 7\sqrt{x^2-1}-2\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.\right)$

1.25. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|x+\sqrt{x^2+1}|+3\sqrt{x^2+1}+C.\right)$

1.26. $\int \frac{x-5}{x^2+7}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\ln|x^2+7|-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C.\right)$

1.27. $\int \frac{3-7x}{1+x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\operatorname{arctg}x-\frac{7}{2}\ln|1+x^2|+C.\right)$

1.28. $\int \frac{8-2x}{1+3x^2}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x-\frac{1}{3}\ln|1+3x^2|+C.\right)$

1.29. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3\sqrt{x^2+4}+7\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C.\right)$

1.30. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-4}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-4}|+C.\right)$

2

2.1. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\ln|1+3\cos 2x|+C.\right)$

2.2. $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C.\right)$

2.3. $\int \frac{\sin 3x}{3 - \cos 3x} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \ln |3 - \cos 3x| + C.\right)$

2.4. $\int \frac{e^x dx}{2e^x + 3}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \ln |2e^x + 3| + C.\right)$

2.5. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 4} dx.$

$(\textit{Ответ:}\ -\ln |\cos^2 x - 4| + C.)$

2.6. $\int \frac{e^x dx}{4 - 3e^x}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3} \ln |4 - 3e^x| + C.\right)$

2.7. $\int \frac{x^2 dx}{7 - 5x^3}.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{15} \ln |7 - 5x^3| + C.\right)$

2.8. $\int \frac{\sin 2x}{3 \sin^2 x + 4} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \ln |3 \sin^2 x + 4| + C.\right)$

2.9. $\int \frac{e^{2x}}{5 + e^{2x}} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \ln |5 + e^{2x}| + C.\right)$

2.10. $\int \frac{4x^3}{7 + 2x^4} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \ln |7 + 2x^4| + C.\right)$

2.11. $\int \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 17} dx.$

$(\textit{Ответ:}\ \ln |2x^2 - 5x + 17| + C.)$

2.12. $\int \frac{7x^3}{2x^4 - 5} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{7}{8} \ln |2x^4 - 5| + C.\right)$

2.13. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x - 2}} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{\sin 3x - 2} + C.\right)$

2.14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$ $(\textit{Ответ:}\ -2\sqrt{1 + \cos^2 x} + C.)$

2.15. $\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + C.\right)$

2.16. $\int \frac{\sin 2x}{4 - \sin^2 x} dx.$

$(\textit{Ответ:}\ -\ln |4 - \sin^2 x| + C.)$

2.17. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 5} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \ln |e^{3x} - 5| + C.\right)$

2.18. $\int \frac{x^2}{7 + 3x^3} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{9} \ln |7 + 3x^3| + C.\right)$

2.19. $\int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x| + C.\right)$

2.20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 3}} dx.$

$(\textit{Ответ:}\ \sqrt{e^{2x} + 3} + C.)$

2.21. $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 10} dx.$ $(\textit{Ответ:}\ \ln |x^3 + x - 10| + C.)$

2.22. $\int \frac{x^5}{3x^6 - 7} dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{18} \ln |3x^6 - 7| + C.\right)$

2.23. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 3}}.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{5}\sqrt{x^5 + 3} + C.\right)$

2.24. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx$. (*Ответ:* $\sqrt{2x^3-4x}+C$.)

2.25. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{2}{7}\sqrt{5-\sin 7x}+C.\right)$

2.26. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{1}{2}\sqrt{\cos 4x+3}+C.\right)$

2.27. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}dx$. (*Ответ:* $\ln|4x^3+x^5|+C$.)

2.28. $\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. (*Ответ:* $-4\sqrt{1-e^{2x}}+C$.)

2.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{6-\cos^2 x}+C$.)

2.30. $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{7}{5}\sqrt{5x^2-4}+C.\right)$

3

3.1. $\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg} x+C.\right)$

3.2. $\int \frac{7-x^2}{1-x}dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^2}{2}+x-6\ln|1-x|+C.\right)$

3.3. $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\right)$

3.4. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{4}{3}x^3-x^2+x-\ln|2x+1|+C.\right)$

3.5. $\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$.

$\left(\text{Ответ:} \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 8\ln|x^2-4| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.\right)$

3.6. $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}x^3 - 2x - \operatorname{arctg} x + C.\right)$

3.7. $\int \frac{x^3-1}{2x+1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.\right)$

3.8. $\int \frac{x^5}{1-x^3}dx.$ $\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C.\right)$

3.9. $\int \frac{x^2}{x^2+3}dx.$ $\left(\text{Ответ: } x - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.10. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.\right)$

3.11. $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{9}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.\right)$

3.12. $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1}dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2+1| + C.\right)$

3.13. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$

$\left(\text{Ответ: } x - \frac{5}{2}\ln|x^2-4| + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

3.14. $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 28\ln|x+3| + C.\right)$

3.15. $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.\right)$

3.16. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}x^3 - x + 2\operatorname{arctg} x + C.\right)$

3.17. $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{x^3}{3}-3x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C.\right)$

3.18. $\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{x^3}{3}+4x+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.\right)$

3.19. $\int \frac{x^3-3}{x+5}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+25x-128\ln|x+5|+C.\right)$

3.20. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\mathrm{arctg}\,x+C.\right)$

3.21. $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1}dx.$ $\left(\text{Ответ: } -\frac{2}{3}x^3+2x-\mathrm{arctg}\,x+C.\right)$

3.22. $\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}x^3+2x^2+8x+13\ln|x-2|+C.\right)$

3.23. $\int \frac{2x^2+5}{x+1}dx.$ (Ответ: $2x+3\,\mathrm{arctg}\,x+C.$)

3.24. $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.\right)$

3.25. $\int \frac{x^2+x}{2-x}dx.$ $\left(\text{Ответ: } -\frac{x^2}{2}-3x-6\ln|x-2|+C.\right)$

3.26. $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx.$

(Ответ: $x^2+14x+103\ln|x-7|+C.$)

3.27. $\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx.$

$\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}x^3+x^2+2x+5\ln|x-1|+C.\right)$

3.28. $\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{x^3}{3}+4x-\frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\right)$

3.29. $\int \frac{x^2+4}{x-3}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2}+3x+13\ln|x-3|+C.\right)$

3.30. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ x+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C.\right)$

4

4.1. $\int \sin^2(1-x)dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2(1-x)+C.\right)$

4.2. $\int \sin^3(1-x)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \cos(1-x)-\frac{1}{3}\cos^3(1-x)+C.\right)$

4.3. $\int\left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ 3x+20\cos\frac{x}{5}-5\sin\frac{2x}{5}+C.\right)$

4.4. $\int \cos^3 5x\sin 5x dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{20}\cos^4 5x+C.\right)$

4.5. $\int \cos^3(1-x)dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\sin(1-x)+\frac{1}{3}\sin^3(1-x)+C.\right)$

4.6. $\int (3-\sin 2x)^2dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{19}{2}x+3\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.\right)$

4.7. $\int \sin^2\frac{3x}{2}dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 3x+C.\right)$

4.8. $\int(\cos x+3)^2dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{19}{2}x+6\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right)$

4.9. $\int \cos^3(x+3)dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \sin(x+3)-\frac{1}{3}\sin^3(x+\right.$
$\left.+3)+C.\right)$

4.10. $\int \sin^3 \frac{4x}{5}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{5}{4}\cos\frac{4x}{5} + \frac{5}{12}\cos^3\frac{4x}{5} + C.\right)$

4.11. $\int (1 - \cos x)^2\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}x - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right)$

4.12. $\int \sin^2 (2x - 1)dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x - 2) + C.\right)$

4.13. $\int \sin^3 6x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{18}\cos^3 6x + C.\right)$

4.14. $\int \sin^2 0{,}5x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.\right)$

4.15. $\int \sin^2\left(\frac{x}{2} + 1\right)dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x + 2) + C.\right)$

4.16. $\int \cos^2 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.\right)$

4.17. $\int\left(1 + 2\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 3x + 8\sin\frac{x}{2} + 2\sin x + C.\right)$

4.18. $\int \cos^2 3x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.19. $\int \sin^4 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C.\right)$

4.20. $\int \sin^2 3x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.21. $\int (1 - \cos 3x)^2 dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right)$

4.22. $\int \cos^2\frac{2x}{5}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}\sin\frac{4x}{5} + C.\right)$

4.23. $\int \sin^3 5x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{15}\cos^3 5x + C.\right)$

4.24. $\int \sin^4 x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\right)$

4.25. $\int \cos^4 x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\right)$

4.26. $\int \cos^3 4x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin^3 4x + C.\right)$

4.27. $\int \cos^2 7x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2} x + \frac{1}{28} \sin 14x + C.\right)$

4.28. $\int (\sin x - 5)^2 dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{51}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + 10 \cos x + C.\right)$

4.29. $\int \sin^3 4x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{12} \cos^3 4x + C.\right)$

4.30. $\int \sin^2 \frac{3x}{4} dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2} x - \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + C.\right)$

5

5.1. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$. $(\textit{Ответ: } \mathrm{tg}\, x - x + C.)$

5.2. $\int \mathrm{ctg}^3 (x-6) dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{2} \mathrm{ctg}^2(x-6) - \ln |\sin (x-6)| + C.\right)$

5.3. $\int \mathrm{tg}^4 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{9} \mathrm{tg}^3 3x - \frac{1}{3} \mathrm{tg}\, 3x + x + C.\right)$

5.4. $\int \mathrm{tg}^2 7x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{7} \mathrm{tg}\, 7x - x + C.\right)$

5.5. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4} \mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C.\right)$

5.6. $\int x\, \mathrm{tg}^2 x^2 dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2} \mathrm{tg}\, x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C.\right)$

5.7. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C.\right)$

5.8. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - x + C.\right)$

5.9. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C.\right)$

5.10. $\int \operatorname{tg}^2 4x\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x - x + C.\right)$

5.11. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C.\right)$

5.12. $\int \operatorname{ctg}^2 5x\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x - x + C.\right)$

5.13. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + 3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right| + C.\right)$

5.14. $\int (1 - \operatorname{tg} 2x)^2\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C.\right)$

5.15. $\int \operatorname{tg}^5 2x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x - \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C.\right)$

5.16. $\int (2x + \operatorname{tg}^2 7x)\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ x^2 + \frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x - x + C.\right)$

5.17. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3}\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 \frac{2x}{3} - \frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{2x}{3} + x + C.\right)$

5.18. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x)^2\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C.\right)$

5.19. $\int (1 - \operatorname{ctg} x)^2\,dx$.

$(\textit{Ответ:}\ -2\ln|\sin x| - \operatorname{ctg} x + C.)$

5.20. $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x - \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C.\right)$

5.21. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.\right)$

5.22. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ 6\operatorname{tg}\frac{x}{6} - x + C.\right)$

5.23. $\int \operatorname{tg}^4 (x-6) dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x-6) - \operatorname{tg}(x-6) + x + C.\right)$

5.24. $\int \operatorname{tg}^3 4x dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x + \frac{1}{4}\ln|\cos 4x| + C.\right)$

5.25. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{4} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{4} + x + C.\right)$

5.26. $\int \operatorname{tg}^4 (x+5) dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{\operatorname{tg}^3(x+5)}{3} - \operatorname{tg}(x+5) + x + C.\right)$

5.27. $\int \operatorname{tg}^3 (x-3) dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x-3) + \ln|\cos(x-3)| + C.\right)$

5.28. $\int \operatorname{tg}^2 (5x+1) dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x+1) - x + C.\right)$

5.29. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{4} dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{7}\operatorname{tg}\frac{7x}{4} - x + C.\right)$

5.30. $\int \operatorname{tg}^5 4x dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{46}\operatorname{tg}^4 4x - \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x + bx + C.\right)$

6

6.1. $\int \sin 3x \cos x dx.$

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right)$

6.2. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx.$ $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{12}\sin^6 2x + C.\right)$

6.3. $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{9}\sin^3 3x + C.\right)$

6.4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos^4 5x + C.\right)$

6.5. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{4} - 2\cos\frac{x}{4} + C.\right)$

6.6. $\int \cos x \sin 9x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.\right)$

6.7. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{10}\sin^5 2x + C.\right)$

6.8. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\, dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos x + C.\right)$

6.9. $\int \cos^5 x \sin x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{6}\cos^6 x + C.\right)$

6.10. $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C.\right)$

6.11. $\int \sin 5x \sin 7x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.\right)$

6.12. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right)$

6.13. $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$. $\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{16}\cos^4 4x + C.\right)$

6.14. $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\cos^{-2} 2x + C.\right)$

6.15. $\int \cos x \sin 9x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.\right)$

6.16. $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ: } -\frac{1}{2}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right)$

6.17. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.\right)$

6.18. $\int \sin^3 7x \cos 7x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{28}\sin^4 7x + C.\right)$

6.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\cos^{-2} x + C.\right)$

6.20. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 2x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{6\sin^3 2x} + C.\right)$

6.21. $\int \cos 2x \cos 5x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{14}\sin 7x + C.\right)$

6.22. $\int \sin^2 2x \cos x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{3}\sin^3 x - \frac{4}{5}\sin^5 x + C.\right)$

6.23. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{3\sin^3 x} + C.\right)$

6.24. $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C\right)$

6.25. $\int \sin x \cos^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{\cos^4 x}{4} + C.\right)$

6.26. $\int \sin 5x \cos x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.\right)$

6.27. $\int \sin x \cos 4x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.\right)$

6.28. $\int \cos 3x \cos x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.\right)$

6.29. $\int \cos^4 2x \sin 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{10}\cos^5 2x + C.\right)$

6.30. $\int \cos 7x \cos 5x dx$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.\right)$

7

7.1. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{8x - 5}{\sqrt{39}} + C.\right)$

7.2. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} + C.\right)$

7.3. $\int \frac{dx}{2x^2 - 7x + 1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{41}} \ln\left|\frac{4x - 7 - \sqrt{41}}{4x - 7 + \sqrt{41}}\right| + C.\right)$

7.4. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{7} \ln\left|\frac{2x - 3}{2x + 4}\right| + C.\right)$

7.5. $\int \frac{dx}{5x^2 + 2x + 7}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{34}} \operatorname{arctg} \frac{5x + 1}{\sqrt{34}} + C.\right)$

7.6. $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$. ($\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg}(2x - 1) + C.$)

7.7. $\int \frac{dx}{2x^2 - 11x + 2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{105}} \ln\left|\frac{4x - 11 - \sqrt{105}}{4x - 11 + \sqrt{105}}\right| + C.\right)$

7.8. $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{15}} + C.\right)$

7.9. $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 3}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln\left|\frac{x - 2 - \sqrt{3}}{x - 2 + \sqrt{3}}\right| + C.\right)$

7.10. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x}{x + 3/2}\right| + C.\right)$

7.11. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C.\right)$

7.12. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{11}}+C.\right)$

7.13. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{10}\ln\left|\frac{3x-9}{3x+1}\right|+C.\right)$

7.14. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C.\right)$

7.15. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.\right)$

7.16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C.\right)$

7.17. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{11}}+C.\right)$

7.18. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.\right)$

7.19. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C.\right)$

7.20. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-4}{2x+1}\right|+C.\right)$

7.21. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{7}}{2x-3+\sqrt{7}}\right|+C.\right)$

7.22. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{7}}+C.\right)$

7.23. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+7-\sqrt{5}}{2x+7+\sqrt{5}}\right|+C.\right)$

7.24. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right|+C.\right)$

7.25. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.\right)$

7.26. $\int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 3}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{dx}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{2x + 3 - \sqrt{3}}{2x + 3 + \sqrt{3}}\right| + C.\right)$

7.27. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 4}{x - 2}\right| + C.\right)$

7.28. $\int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2}$. $\left(\textit{Ответ:}\ -\frac{1}{4} \ln\left|\frac{3x - 1}{3x + 3}\right| + C.\right)$

7.29. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 6}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 3}{\sqrt{39}} + C.\right)$

7.30. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5x + 1}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{6x + 5 - \sqrt{13}}{6x + 5 + \sqrt{13}}\right| + C.\right)$

8

8.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{x - 4}{\sqrt{20}} + C.\right)$

8.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|x - \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}}\right| + C.\right)$

8.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x + 3}{5} + C.\right)$

8.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}$.

$(\textit{Ответ:}\ \ln\left|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 8}\right| + C.)$

8.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 8x - 2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x - 2}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - 3x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x + 1}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$.)

8.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{4}{5}}\right| + C$.)

8.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{x-1}{2} + C$.)

8.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{3}{4}}\right| + C$.)

8.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$.)

8.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x-\frac{1}{8}+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x+1}\right| + C$.)

8.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$. (*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{10}} + C$.)

8.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{2} \ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+1}\right| + C$.)

8.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$. (*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + C$.)

8.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$.

(*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+\frac{1}{2}}\right| + C$.)

8.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

(*Ответ:* $\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right| + C$.)

8.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{3} + C.\right)$

8.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}\right| + C.\right)$

8.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x+1}{\sqrt{17}} + C.\right)$

8.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-1}\right| + C.\right)$

8.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C.\right)$

8.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}\right| + C.\right)$

8.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\right)$

8.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+3}{5} + C.\right)$

8.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+1}\right| + C.\right)$

8.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{13}} + C.\right)$

8.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

$(\textit{Ответ:}\ \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}| + C.)$

9.1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+3x-4| + \frac{1}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{41}}{4x+3+\sqrt{41}}\right| + C.\right)$

9.2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{6}\ln|3x^2+x+1| + \frac{35}{3\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{6x+1}{\sqrt{11}} + C.\right)$

9.3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\ln|3x^2-2x+6| - \frac{1}{3\sqrt{17}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3x-1}{\sqrt{17}} + C.\right)$

9.4. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+x+5}.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+5| - \frac{1}{2\sqrt{39}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4x+1}{\sqrt{39}} + C.\right)$

9.5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2+x-2| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.\right)$

9.6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{10}\ln|5x^2-3x+2| - \frac{11}{5\sqrt{31}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C.\right)$

9.7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2-6x-8| + \frac{11}{20}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C.\right)$

9.8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|2x^2-7x+1| + \frac{23}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x-7-\sqrt{41}}{4x-7+\sqrt{41}}\right| + C.\right)$

9.9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{4}\ln|2x^2-5x+2| + \frac{17}{12}\ln\left|\frac{2x-4}{2x-1}\right| + C.\right)$

9.10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\ln|4x^2-4x+5| + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2}+C.\right)$

9.11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{4}\ln|2x^2+x+1| + \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C.\right)$

9.12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{6}\ln|3x^2-2x-3| + \frac{2}{3\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3x-1-\sqrt{10}}{3x-1+\sqrt{10}}\right|+C.\right)$

9.13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\ln|4x^2+6x-13| + \frac{5}{2\sqrt{61}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{61}}{4x+3+\sqrt{61}}\right|+C.\right)$

9.14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{5}{2}\ln|x^2-4x+1| + \frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C.\right)$

9.15. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+5| - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.\right)$

9.16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C.\right)$

9.17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\ln|2x^2+8x-6| - \frac{5}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+C.\right)$

9.18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{8}\ln|4x^2+16x-$

$-12|+\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+C.\Big)$

9.19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln|3x^2-6x-9|+$

$+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.\Big)$

9.20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\frac{1}{2}\ln|2x^2-x-3|+$

$+\frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right|+C.\Big)$

9.21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{6}\ln|3x^2+x-1|-$

$-\frac{25}{6\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{13}}{6x+1+\sqrt{13}}\right|+C.\Big)$

9.22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\ln|x^2-4x-2|+$

$+\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{6}}{x-2+\sqrt{6}}\right|+C.\Big)$

9.23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{4}\ln|2x^2+x-4|+$

$+\frac{21}{4\sqrt{33}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{33}}{4x+1+\sqrt{33}}\right|+C.\Big)$

9.24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\ln|3x^2+2x-7|+$

$+\frac{7}{6\sqrt{22}}\ln\left|\frac{3x+1-\sqrt{22}}{3x+1+\sqrt{22}}\right|+C.\Big)$

9.25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{8}\ln|4x^2+2x-3|-$

$-\frac{\sqrt{13}}{8}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}}\right|+C.\Big)$

9.26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{6}\ln|3x^2-x+5|+\right.$

$$\left.+\frac{13}{3\sqrt{59}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{59}}+C.\right)$$

9.27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}\ln|x^2+5x-1|-\right.$

$$\left.-\frac{19}{2\sqrt{29}}\ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{29}}{2x+5+\sqrt{29}}\right|+C.\right)$$

9.28. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{8}\ln|4x^2+3x-1|-\right.$

$$\left.-\frac{59}{40}\ln\left|\frac{8x-2}{8x+8}\right|+C.\right)$$

9.29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{5}\ln|5x^2+2x-10|+\right.$

$$\left.+\frac{3}{5\sqrt{49}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{49}}+C.\right)$$

9.30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{10}\ln|5x^2-x+7|-\right.$

$$\left.-\frac{39}{5\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{139}}+C.\right)$$

10

10.1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-\right.$

$$\left.-4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}\right|+C.\right)$$

10.2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-1}-\right.$

$$\left.-\sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-\frac{1}{2}}\right|+C.\right)$$

10.3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5}-\right.$

$$\left.-\frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}}\right|+C.\right)$$

10.4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

10.5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9} + \frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}\right| + C.\right)$

10.6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -2\sqrt{1+x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.\right)$

10.7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\sqrt{1-x+x^2} - 7\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right| + C.\right)$

10.8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 3\sqrt{x^2+6x+13} - 5\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right| + C.\right)$

10.9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-5x+1} + \frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}}\right| + C.\right)$

10.10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 5\sqrt{x^2+3x-4} - \frac{11}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-4}\right| + C.\right)$

10.11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-x+7} - \frac{15}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}}\right| + C.\right)$

10.12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x^2-3x+4}+$

$$+2\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+4}\right|+C.\Big)$$

10.13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-4\sqrt{2+x-x^2}+$

$$+3\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.\Big)$$

10.14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+4x-5}-$

$$-4\sqrt{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{5}{2}}\right|+C.\Big)$$

10.15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-3\sqrt{4+2x-x^2}+$

$$+5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.\Big)$$

10.16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}-$

$$-\frac{20}{3\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{3}+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C.\Big)$$

10.17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $-\sqrt{3-6x-x^2}+$

$$+2\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}}+C.\Big)$$

10.18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x-5}+$

$$+\frac{11}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}\right|+C.\Big)$$

10.19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $7\sqrt{x^2-5x+1}+$

$$+\frac{31}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.\Big)$$

10.20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+x-5} - \frac{65}{16}\ln\left|x+\frac{1}{8}+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}}\right| + C.\right)$

10.21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -3\sqrt{2+3x-x^2} + \frac{17}{2}\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}} + C.\right)$

10.22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -\sqrt{3-2x-x^2} - 7\arcsin\frac{x+1}{2} + C.\right)$

10.23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \sqrt{2x^2-x+6} + \frac{7}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+3}\right| + C.\right)$

10.24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } -\sqrt{4+2x-x^2} - 8\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}} + C.\right)$

10.25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\sqrt{x^2+5x-4} + 2\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-4}\right| + C.\right)$

10.26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-6x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{1}{2}}\right| + C.\right)$

10.27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-4} + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-\frac{4}{3}}\right| + C.\right)$

10.28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{2x^2-x+5}+$

$$+2\sqrt{2}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C.\Big)$$

10.29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$. $\Big($*Ответ:* $3\sqrt{x^2-5x+1}+$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C.\Big)$$

10.30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$. $\Big($*Ответ:* $-7\sqrt{2-3x-x^2}-$

$$-\frac{23}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C.\Big)$$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx$.

▶ $$\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx = 3\int\frac{dx}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2}-7\int\frac{xdx}{4x^2+5}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(2x)}{(2x)^2+(\sqrt{5})^2}-\frac{7}{8}\int\frac{8xdx}{4x^2+5}=$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{7}{8}\ln(4x^2+5)+C.$$ ◀

2. $\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}$.

▶ Воспользуемся подстановкой $u=2-e^{-3x}$. Тогда $du=3e^{-3x}dx$ и

$$\int\frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}=\frac{1}{3}\int\frac{3e^{-3x}dx}{2-e^{-3x}}=\frac{1}{3}\ln|2-e^{-3x}|+C.$$ ◀

3. $\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}dx$.

▶ Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель, выделим целую часть неправильной дроби, стоящей под знаком интеграла. Получим интеграл от алгебраической суммы:

$$\int \frac{3x^5-4x}{x^2+1}\,dx=\int\left(3x^2-3x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C. \blacktriangleleft$$

4. $\int \cos^3(7x+2)dx$.

▶ Используя тригонометрическое тождество $\cos^2(7x+$ $+2)=1-\sin^2(7x+2)$, получаем

$$\int\cos^3(7x+2)dx=\int\cos^2(7x+2)\cos(7x+2)dx=$$
$$=\int(1-\sin^2(7x+2))\cos(7x+2)dx=\int\cos(7x+2)dx-$$
$$-\int\sin^2(7x+2)\cos(7x+2)dx=\frac{1}{7}\sin(7x+2)-$$
$$-\frac{1}{7}\int\sin^2(7x+2)d(\sin(7x+2))=\frac{1}{7}\sin(7x+2)-$$
$$-\frac{1}{21}\sin^3(7x+2)+C. \blacktriangleleft$$

5. $\int \mathrm{ctg}^4\,5x\,dx$.

◀ Так как $\mathrm{ctg}^2\,5x=\frac{1}{\sin^2 5x}-1$, то

$$\int\mathrm{ctg}^4\,5x\,dx=\int\mathrm{ctg}^2\,5x\left(\frac{1}{\sin^2 5x}-1\right)dx=$$
$$=\int\mathrm{ctg}^2\,5x\frac{1}{\sin^2 5x}\,dx-\int\mathrm{ctg}^2\,5x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{5}\int\mathrm{ctg}^2\,5x\left(-\frac{5}{\sin^2 5x}\right)dx-\int\left(\frac{1}{\sin^2 5x}-1\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{15}\mathrm{ctg}^3\,5x+\frac{1}{5}\mathrm{ctg}\,5x+x+C. \blacktriangleleft$$

6. $\int\sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}x\,dx$.

$$\blacktriangleright\int\sin\frac{7}{2}x\sin\frac{3}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 5x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{10}\sin 5x+C. \blacktriangleleft$$

7. $\int\frac{dx}{6x^2-3x+2}$.

▶ Выделим в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат. Тогда

$$\int\frac{dx}{6x^2-3x+2}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x^2-\frac{1}{2}x+1/3}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-1/4)^2+1/3-1/16}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{4\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{x-1/4}{\sqrt{13}/(4\sqrt{3})}+C=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{(4x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{13}}+C. \blacktriangleleft$$

8. $\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}\,dx.$

▶ Выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя, получим

$$\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}\,dx=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x-5}{2-5x-x^2}\,dx-\frac{3}{2}\cdot 9\int\frac{dx}{2-5x-x^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2|+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{(x-5/2)^2-2-25/4}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2|+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{(x-5/2)^2-(\sqrt{33}/2)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2|+\frac{27}{2\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x-5/2-\sqrt{33}/2}{x-5/2+\sqrt{33}/2}\right|+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|2-5x-x^2|+\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right|+C. \blacktriangleleft$$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}.$

▶ Выделив в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-7/5}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(x+1/5)}{\sqrt{(x+1/5)^2-7/5-1/25}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+1/5+\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-7/5}\right|+C. \blacktriangleleft$$

10. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx.$

▶ Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, предварительно выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной подкоренного выражения из знаменателя:

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+2/3}{\sqrt{7}/3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-8.3

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + \sqrt{1-x^2} + C.\right)$

1.2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C.\right)$

1.3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \left(\sqrt{4+x^2} + \ln\left|\frac{2-\sqrt{4+x^2}}{2+\sqrt{4+x^2}}\right| + C.\right)\right.$

1.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } C - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.5. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.\right)$

1.6. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2+9}+\right.$

$$\left.+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3+\sqrt{x^2+9}}\right|+C.\right)$$

1.7. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{x-\sqrt{4+x^2}}\right|-\right.$

$$\left.-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.\right)$$

1.8. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.9. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.\right)$

1.10. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.11. $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{x^5}.\right)$

1.12. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+C.\right)$

1.13. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.\right)$

1.14. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.\right)$

1.15. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}-\right.$

$$\left.-3\sqrt{(9-x^2)^3}+C.\right)$$

1.16. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$. $\left(\textit{Ответ: } C-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.\right)$

1.17. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.\right)$

1.18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}-x}\right| - \right.$

$\left. - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C.\right)$

1.19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C.\right)$

1.20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{27}\,\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}.\right)$

1.22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{8}\arcsin x - \right.$

$\left. - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) + C.\right)$

1.23. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \right.$

$\left. - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.\right)$

1.24. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx}{x^4}$. $\left(\text{Ответ: } \arcsin\frac{x}{2} + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^3} + C.\right)$

1.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.\right)$

1.26. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{27}\,\frac{\sqrt{(9+x^2)^3}}{x^3}.\right)$

1.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.\right)$

1.28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.\right)$

1.29. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{48}\,\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}.\right)$

1.30. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } C - \arcsin\frac{x}{4} - \right.$

$\left. - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + C.\right)$

2

2.1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1} - \right.\right.$

$\left.\left. - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}(x+1)}\right|.\right)$

2.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.\right)$

2.3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\right)$

2.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|.\right)$

2.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|.\right)$

2.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \arcsin\frac{1}{x}.\right)$

2.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \right.\right.$

$\left.\left. + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|.\right)$

2.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{1}{2}\right|.\right)$

2.9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}\,x}.\right)$

2.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$. $\left(\textit{Ответ: } C - \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}\,x}.\right)$

2.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ*: $C - \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$.)

2.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$. (*Ответ*: $C - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4-x}{3x}$.)

2.13. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$. (*Ответ*: $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{1}{x+1} - \right.$

$\left. - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3}(x+1)}\right|$.)

2.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$. (*Ответ*: $C - \ln\left|\frac{1}{x+1} - \right.$

$\left. - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$.)

2.15. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. (*Ответ*: $C - \ln\left|\frac{1}{x+1} - \right.$

$\left. - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.)

2.16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$. (*Ответ*: $C - \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)}$.)

2.17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$. (*Ответ*: $\arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{5}(x+1)} + C$.)

2.18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. (*Ответ*: $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{1}{x-1} + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right|$.)

2.19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$. (*Ответ*: $C - \ln\left|\frac{1}{x-1} + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\right|$.)

2.20. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x-1}\right|.\right)$

2.21. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{3-x}{\sqrt{5}(x-1)}.\right)$

2.22. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x-1}\right|.\right)$

2.23. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1}\right|.\right)$

2.24. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{5}(x-1)}.\right)$

2.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x}\right|.\right)$

2.26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6-x}{x\sqrt{3}}.\right)$

2.27. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+5}{3(x+1)}.\right)$

2.28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x}\right|.\right)$

2.29. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \right.$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x+1}\right|.\right)$$

2.30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$. $\left(\text{Ответ: } C - \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{3}{2} + \right.\right.$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{1-3x-2x^2}}{x}\right|.\right)$$

3

3.1. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$. (Ответ: $\operatorname{tg} x \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C$.)

3.2. $\int \cos(\ln x)dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.\right)$

3.3. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } C - \frac{\ln x + 1}{x}.\right)$

3.4. $\int \ln(x+2)\,dx$. (Ответ: $x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) + C$.)

3.5. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\,dx$. (Ответ: $C - \operatorname{ctg} x \ln(\cos x) - x$.)

3.6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$. (Ответ: $\ln x \ln(\ln x) - \ln x + C$.)

3.7. $\int \ln^2 x\,dx$. (Ответ: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.)

3.8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$. (Ответ: $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$.)

3.9. $\int x \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} - x - \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + C.\right)$

3.10. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. (Ответ: $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.)

3.11. $\int \ln(x+4)\,dx$. (Ответ: $x\ln(x+4) - x + 4\ln(x+4) + C$.)

3.12. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. (*Ответ:* $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\right.$
$\left.+\sqrt{1+x^2}\right)-x+C$.)

3.13. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$. (*Ответ:* $C-x-\operatorname{ctg} x-$
$-\operatorname{ctg} x\ln(\sin x)$.)

3.14. $\int x^2\ln(x+1)\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^3}{3}\ln(x+1)-$
$-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(x+1)+C.\Big)$

3.15. $\int \frac{\ln x\ln(\ln x)}{x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln^2 x\ln(\ln x)-$
$-\frac{1}{4}\ln^2 x+C.\Big)$

3.16. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. (*Ответ:* $x\ln(x^2+1)-2x+$
$+2\operatorname{arctg} x+C$.)

3.17. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $C-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}.\Big)$

3.18. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x-$
$-\frac{8}{9}\sqrt{x^3}\ln x+\frac{16}{27}\sqrt{x^3}+C.\Big)$

3.19. $\int \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x\ln\frac{1-x}{1+x}-\ln(x^2-1)+C.\Big)$

3.20. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\Big(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+$
$+x\Big)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.\Big)$

3.21. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C.\Big)$

3.22. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$. (Ответ: $\operatorname{tg} x\ln(\sin x)-x+C$.)

3.23. $\int x\ln(x^2+1)\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+$
$+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.\Big)$

3.24. $\int x\ln^2 x\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+$
$+\frac{x^2}{4}+C.\Big)$

3.25. $\int x^2 \ln x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.\right)$

3.26. $\int x \ln(x+1)\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \right.$
$\left. + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C.\right)$

3.27. $\int \sin(\ln x)\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \right.$
$\left. - \cos(\ln x)) + C.\right)$

3.28. $\int (x^2 - 4)\sin 5x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{25}x\sin 5x - \right.$
$\left. - \frac{x^2 - 21}{5}\cos 5x + C.\right)$

3.29. $\int \ln(x+5)\, dx$. (*Ответ:* $x\ln(x+5) - x +$
$+ 5\ln(x+5) + C$.)

3.30. $\int \ln\frac{2-x}{2+x}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ x\ln\frac{2-x}{2+x} - 2\ln|4 - \right.$
$\left. - x^2| + C.\right)$

4

4.1. $\int \sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{9}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x} - \right.$
$\left. - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arccos\sqrt{x} + C.\right)$

4.2. $\int \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\, dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{x} - \right.$
$\left. - \frac{2}{9}\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arcsin\sqrt{x} + C.\right)$

4.3. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \right.$
$\left. + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.\right)$

4.4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{x+1}\arcsin x +$
$+ 4\sqrt{1-x} + C$.)

4.5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\, dx$. (*Ответ:* $4\sqrt{1-x} -$

$-2\sqrt{1-x}\arcsin x+C.)$

4.6. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. (*Ответ*: $2\sqrt{x}-$

$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C.)$

4.7. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. (*Ответ*: $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-$

$-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.)$

4.8. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (*Ответ*: $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C.)$

4.9. $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx$. $\Big($*Ответ*: $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+$

$+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C.\Big)$

4.10. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,xdx$. $\Big($*Ответ*: $\frac{x^2}{2}\mathrm{arcctg}\,x+\frac{x}{2}+$

$+\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,x+C.\Big)$

4.11. $\int \frac{x\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$. $\Big($*Ответ*: $C-\frac{x}{2}-$

$-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x.\Big)$

4.12. $\int \arccos 2xdx$. $\Big($*Ответ*: $\arccos 2x-$

$-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.\Big)$

4.13. $\int \mathrm{arctg}\,xdx$. $\Big($*Ответ*: $x\,\mathrm{arctg}\,x-$

$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\Big)$

4.14. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. (*Ответ*: $C-2\sqrt{x}-$

$-2\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}.)$

4.15. $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (*Ответ*: $C-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x.)$

4.16. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$. (*Ответ*: $C-4\sqrt{1+x}-$

$-2\sqrt{1-x}\arccos x.)$

4.17. $\int \operatorname{arcctg} 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $x \operatorname{arcctg} 2x + \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C.\Big)$

4.18. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. (*Ответ:* $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arcctg} x + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C.$)

4.19. $\int \arcsin 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\Big)$

4.20. $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x + C.\Big)$

4.21. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$. (*Ответ:* $2\sqrt{1+x} \arccos x - 4\sqrt{1-x} + C.$)

4.22. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + C.\Big)$

4.23. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C.\Big)$

4.24. $\int \operatorname{arctg}(x+5) dx$. $\Big($*Ответ:* $x \operatorname{arctg}(x+5) - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 10x + 26| + 5 \operatorname{arctg}(x+5) + C.\Big)$

4.25. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} x + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + C.\Big)$

4.26. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.\Big)$

4.27. $\int x^2 \cos\frac{x}{3} dx$. $\Big($*Ответ:* $3x^2 \sin\frac{x}{3} + 18x \cos\frac{x}{3} - 54 \sin\frac{x}{3} + C.\Big)$

4.28. $\int x \operatorname{arcctg}^2 x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \operatorname{arcctg}^2 x + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} \operatorname{arcctg}^2 x + x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C.\right)$

4.29. $\int x^2 \sin 2x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{2} \sin 2x - \right.$

$\left. - \frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.\right)$

4.30. $\int (x^2 + 4) e^{2x} dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2} (x^2 + 4) e^{2x} + \right.$

$\left. + \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C.\right)$

5

5.1. $\int x^2 \cos 2x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \right.$

$\left. - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\right)$

5.2. $\int x \sin^2 x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \right.$

$\left. - \frac{1}{8} \cos 2x + C.\right)$

5.3. $\int x \sin x \cos x dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{8} \sin 2x - \right.$

$\left. - \frac{x}{4} \cos 2x + C.\right)$

5.4. $\int x^2 (\sin 2x - 3) dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{2} \sin 2x - \right.$

$\left. - \frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - x^3 + C.\right)$

5.5. $\int x^2 (\sin x + 1) dx$. $\left(\text{Ответ: } 2x \sin x - x^2 \cos x + \right.$

$\left. + 2 \cos x + \frac{x^3}{3} + C.\right)$

5.6. $\int (x^2 + x) e^{-x} dx$. (Ответ: $C - (x^2 + 3x + 3) e^{-x}$.)

5.7. $\int (x^2 + x) e^{x} dx$. (Ответ: $(x^2 - x + 1) e^{x} + C$.)

5.8. $\int (x^2 - x + 1) e^{-x} dx$. (Ответ: $C - (x^2 + x + 2) e^{-x}$.)

5.9. $\int (x^2 - x + 1) e^{x} dx$. (Ответ: $(x^3 - 3x + 4) e^{x} + C$.)

5.10. $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln |\sin x| - x \operatorname{ctg} x - \right.$

$\left. - \frac{x^2}{2} + C.\right)$

5.11. $\int x^2e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+2)e^{-x}$.)

5.12. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. (*Ответ:* $\ln|\sin x| - x\operatorname{ctg} x + C$.)

5.13. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$. (*Ответ:* $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$.)

5.14. $\int x\operatorname{tg}^2 xdx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.\right)$

5.15. $\int (x^2+2)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+4)e^{-x}$.)

5.16. $\int x^2\sin^2 xdx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.\right)$

5.17. $\int x^2(\cos 2x + 3)dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right)$

5.18. $\int (x^2+2)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $(x^2-2x+4)e^x + C$.)

5.19. $\int (x^3+3)\sin xdx$. (*Ответ:* $2x\sin x - (x^2+1)\cos x + C$.)

5.20. $\int (x^2-3)\cos xdx$. (*Ответ:* $(x^2-4)\sin x + 2x\cos x + C$.)

5.21. $\int (x^2+1)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x^2+2x+3)e^{-x}$.)

5.22. $\int (x^2-1)e^xdx$. (*Ответ:* $(x-1)^2e^x + C$.)

5.23. $\int x^2\cos^2 xdx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.\right)$

5.24. $\int (x^2+x)\sin xdx$. (*Ответ:* $(2x+1)\sin x - (x^2+x-2)\cos x + C$.)

5.25. $\int (x^2+x)\cos xdx$. (*Ответ:* $(x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x + C$.)

5.26. $\int (x^2+1)e^xdx$. (*Ответ:* $(x^2-2x+3)e^x + C$.)

5.27. $\int (x^2-1)e^{-x}dx$. (*Ответ:* $C-(x+1)^2e^{-x}$.)

5.28. $\int x\sin^2 xdx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.\right)$

5.29. $\int \arcsin 9x dx$. (*Ответ:* $x \arcsin 9x + \frac{1}{9}\sqrt{1-81x^2} + C$.)

5.30. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$. (*Ответ:* $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C$.)

6

6.1. $\int (x+1)e^{2x}dx$.

6.2. $\int (x-2)e^{x}dx$.

6.3. $\int (x-7) \cos 2x dx$.

6.4. $\int (x-1) \cos 5x dx$.

6.5. $\int (x+2) \cos 3x dx$.

6.6. $\int (x-2) \cos 4x dx$.

6.7. $\int (x-4) \sin 2x dx$.

6.8. $\int (x-3) \cos x dx$.

6.9. $\int (x+4) \sin 2x dx$.

6.10. $\int x \sin 3x dx$.

6.11. $\int (x+5) \sin x dx$.

6.12. $\int (x-5) \cos x dx$.

6.13. $\int (x+9) \sin x dx$.

6.14. $\int (x+7) \sin 2x dx$.

6.15. $\int (x+4) \sin 3x dx$.

6.16. $\int (x+3) \sin 5x dx$.

6.17. $\int (x-4) \cos 2x dx$.

6.18. $\int (x-8) \sin x dx$.

6.19. $\int (x+4) \cos 3x dx$.

6.20. $\int (x+8) \sin 3x dx$.

6.21. $\int (x+6) \cos 4x dx$.

6.22. $\int (x-6) \sin \frac{x}{2} dx$.

6.23. $\int (x+1) \cos 7x dx$.

6.24. $\int (x+2) \sin \frac{x}{2} dx$.

6.25. $\int x \sin \frac{x}{5} dx$.

6.26. $\int (x+4) \cos \frac{x}{2} dx$.

6.27. $\int (x+1) \sin \frac{x}{3} dx$.

6.28. $\int (x+2) \cos \frac{x}{4} dx$.

6.29. $\int (x+3) \sin \frac{x}{4} dx$.

6.30. $\int (x-9) \sin \frac{x}{2} dx$.

7

7.1. $\int \ln (x-5) dx$.

7.2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

7.3. $\int x^2 e^{-x} dx$.

7.4. $\int (x+1)e^{-4x} dx$.

7.5. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

7.6. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$.

7.7. $\int x \cos 8x dx$.

7.8. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$.

7.9. $\int \arcsin 5x dx$.

7.10. $\int (x+1)e^{-x} dx$.

7.11. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

7.12. $\int x^2 e^{3x} dx$.

7.13. $\int x \cos (x+4) dx$.

7.14. $\int x \cos (x-2) dx$.

7.15. $\int x \cos (x+3) dx$.

7.16. $\int x e^{x+2} dx$.

7.17. $\int x e^{-7x} dx$.

7.18. $\int \arcsin 2x dx$.

7.19. $\int x \sin (x+7) dx$.

7.20. $\int x \cos (x-4) dx$.

7.21. $\int x \sin (x+4) dx$.

7.22. $\int x \cos (x+9) dx$.

7.23. $\int (x+3) e^{-x} dx$.

7.24. $\int \arccos x dx$.

7.25. $\int (x^2-3) e^x dx$.

7.26. $\int x e^{-4x} dx$.

7.27. $\int x \cos (x+7) dx$.

7.28. $\int x e^{-5x} dx$.

7.29. $\int x e^{x+3} dx$.

7.30. $\int x \cos (2-x) dx$.

8

8.1. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

8.2. $\int x \cos 6x dx$.

8.3. $\int \arcsin 3x dx$.

8.4. $\int \arccos 2x dx$.

8.5. $\int \operatorname{arctg} 8x dx$.

8.6. $\int x \sin (x-2) dx$.

8.7. $\int \arcsin 8x dx$.

8.8. $\int x \sin (x+3) dx$.

8.9. $\int x \cos (x+4) dx$.

8.10. $\int \arccos 7x dx$.

8.11. $\int x \cos (x-7) dx$.

8.12. $\int x \sin (x-5) dx$.

8.13. $\int (x-4) e^x dx$.

8.14. $\int x e^{-6x} dx$.

8.15. $\int \operatorname{arctg} 7x dx$.

8.16. $\int \arcsin 5x dx$.

8.17. $\int \ln (x-7) dx$.

8.18. $\int x \cos (x+6) dx$.

8.19. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$.

8.20. $\int \ln (x+8) dx$.

8.21. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5} dx$.

8.22. $\int \ln (x+12) dx$.

8.23. $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$.

8.24. $\int \ln (2x-1) dx$.

8.25. $\int \ln (2x+3) dx$.

8.26. $\int \arccos \frac{x}{5} dx$.

8.27. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx$.

8.28. $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$.

8.29. $\int \operatorname{arctg} 6x dx$.

8.30. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$.

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=4\sin t, & dx=4\cos t\,dt, \\ \sin t = x/4, & t=\arcsin x/4 \end{matrix}\right| \overset{(8.5)}{=}$$

$$\overset{(8.5)}{=} \int 16\sin^2 t\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\,dt = 256\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= 64\int \sin^2 2t\,dt = 32\int (1-\cos 4t)\,dt = 32t - 8\sin 4t + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - 8\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{4}\right) + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{4}(8-x^2)\sqrt{16-x^2} + C. \blacktriangleleft$$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t}, & t=\frac{1}{x}, \\ dx=-\frac{1}{t^2}\,dt & \end{matrix}\right| \overset{(8.5)}{=}$$

$$\overset{(8.5)}{=} -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = -\ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1}\right| + C =$$

$$= C - \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x}\right|. \blacktriangleleft$$

3. $\int (x-7)\sin 5x\,dx.$

$$\blacktriangleright \int (x-7)\sin 5x\,dx = \left|\begin{matrix} u=x-7, & du=dx, \\ dv=\sin 5x\,dx, & v=-\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix}\right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C. \blacktriangleleft$$

4. $\int \arccos 4x dx.$

$$\blacktriangleright \int \arccos 4x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \arccos 4x, \; du = -\dfrac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}, \\ dv = dx, \; v = x \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} x \arccos 4x + 4\int \frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}} =$$

$$= x \arccos 4x - \frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + C. \blacktriangleleft$$

5. $\int xe^{x-7} dx.$

$$\blacktriangleright \int xe^{x-7} dx = \left| \begin{matrix} u = x, \; du = dx, \\ dv = e^{x-7}dx, \; v = e^{x-7} \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} xe^{x-7} - \int e^{x-7} dx = xe^{x-7} - e^{x-7} + C. \blacktriangleleft$$

6. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \; v = \sqrt{1+x^2} \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C. \blacktriangleleft$$

7. $\int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x} dx.$

$$\blacktriangleright \int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2 - 4x + 3, \; du = (2x-4)dx, \\ dv = e^{-2x}dx, \; v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} + \int (x-2)e^{-2x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x - 2, \; du = dx, \\ dv = e^{-2x}dx, \; v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)e^{-2x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C. \blacktriangleleft$$

8. $\int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1} dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\ln(\ln(x+1))\ln(x+1)}{x+1}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln(\ln(x+1)),\ du = \dfrac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}, \\ dv = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}dx,\ v = \dfrac{1}{2}\ln^2(x+1) \end{array} \right| \overset{(8.6)}{=}$$

$$\overset{(8.6)}{=} \frac{\ln^2(x+1)}{2}\ln(\ln(x+1)) - \frac{1}{2}\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{\ln^2(x+1)}{2}\ln(\ln(x+1)) - \frac{1}{4}\ln^2(x+1) + C \blacktriangleleft$$

ИДЗ-8.4

Найти неопределенные интегралы.

1

1.1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}\,dx$. (*Ответ:* $6\ln|x+3| - \ln|x+1| + 2\ln|x+5| + C$.)

1.2. $\int \frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}$. (*Ответ:* $3\ln|x-3| - 4\ln|x-2| + \ln|x+1| + C$.)

1.3. $\int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)}\,dx$. (*Ответ:* $2\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C$.)

1.4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 + 5\ln|x+3| + \ln|x+2| + \ln|x-1| + C$.)

1.5. $\int \frac{8xdx}{(x^2+6x+5)(x+3)}$. (*Ответ:* $-5\ln|x+5| + 6\ln|x+3| - \ln|x+1| + C$.)

1.6. $\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 + x + 2\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C$.)

1.7. $\int \frac{2x^4+8x^3-45x-61}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 - 8\ln|x-1| + 5\ln|x+3| + \ln|x+2| + C$.)

1.8. $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{(x^2+4x+3)(x+5)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 - x - 5\ln|x+5| + 3\ln|x+1| - 3\ln|x+3| + C$.)

1.9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}\,dx$. (Ответ: $3\ln|x+1|+$
$+\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$.)

1.10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$. (Ответ: $4\ln|x-1)-$
$-7\ln|x+3|+3\ln|x-4|+C$.)

1.11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}\,dx$. (Ответ: $2\ln|x-2|+$
$+3\ln|x-3|-2\ln|x+1|+C$.)

1.12. $\int \frac{2x^4-7x^3+3x+20}{(x-2)(x^2-2x-3)}\,dx$. (Ответ: x^2+x-
$-4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+3\ln|x+1|+C$.)

1.13. $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$. (Ответ: $\ln|x+2|-$
$-\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$.)

1.14. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$. (Ответ: $18\ln|x+3|-$
$-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C$.)

1.15. $\int \frac{6x\,dx}{x^3+2x^2-x-2}$. (Ответ: $\ln|x-1|+$
$+3\ln|x+1|-4\ln|x+2|+C$.)

1.16. $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}\,dx$. (Ответ: $3\ln|x+1|+$
$+2\ln|x+3|-\ln|x+5|+C$.)

1.17. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$. (Ответ: $4\ln|x-1|-$
$-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C$.)

1.18. $\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{(x^2+2x-3)(x+2)}\,dx$. (Ответ: $x^2-\ln|x-1|+$
$+\ln|x+2|-2\ln|x+3|+C$.)

1.19. $\int \frac{2x^4+17x^3+40x^2+37x+36}{(x+1)(x^2+8x+15)}\,dx$. (Ответ: x^2-x+
$+3\ln|x+1|+3\ln|x+3|-3\ln|x+5|+C$.)

1.20. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}\,dx$. (Ответ: $\ln|x-1|-$
$-3\ln|x+1|+8\ln|x+2|+C$.)

1.21. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$. (Ответ: $3x^2-12x+$
$+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+32\ln|x+2|+C$.)

1.22. $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}\,dx$. (*Ответ:* $2\ln|x+3| -$
$- 3\ln|x+1| + 3\ln|x+5| + C$.)

1.23. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}\,dx$. (*Ответ:* $6\ln|x+3| -$
$- 2\ln|x+1| - 2\ln|x+5| + C$.)

1.24. $\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 - x +$
$+ 4\ln|x-1| - \ln|x+3| + 2\ln|x-4| + C$.)

1.25. $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x^2-5x+6)(x+1)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 + x +$
$+ 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \ln|x-3| + C$.)

1.26. $\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)}\,dx$. (*Ответ:* $3x^2 - 12x +$
$+ 2\ln|x-1| - 3\ln|x+1| + 10\ln|x+2| + C$.)

1.27. $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x^2-5x+4)(x+3)}\,dx$. (*Ответ:* $x^2 + x +$
$+ 4\ln|x-1| + \ln|x+3| - 2\ln|x-4| + C$.)

1.28. $\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}\,dx$. (*Ответ:* $2\ln|x-2| +$
$+ 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C$.)

1.29. $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$. (*Ответ:* $3x^2 - 12x +$
$+ \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.)

1.30. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$. (*Ответ:* $20\ln|x+3| -$
$- \ln|x-1) - 16\ln|x+2| + C$.)

2

2.1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x + \frac{1}{x} - \ln|x| +$
$+ 2\ln|x-1| + C.\Big)$

2.2. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x + \ln|x| +$
$+ \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C.\Big)$

2.3. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1| -$

$$-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.4. $\int\frac{x+2}{x^3-x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{x}-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C.\Big)$

2.5. $\int\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2x^2-3\ln|x|-$

$$-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C.\Big)$$

2.6. $\int\frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.\Big)$

2.7. $\int\frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x-1|-$

$$-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.8. $\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{x}-3\ln|x|+$

$$+\ln|x-1|+C.\Big)$$

2.9. $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x|+\ln|x-1|+$

$$+\frac{2}{x-1}+C.\Big)$$

2.10. $\int\frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2x^2-2\ln|x|-$

$$-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.\Big)$$

2.11. $\int\frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x-1)^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x^2+\ln|x|-$

$$-\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+C.\Big)$$

2.12. $\int\frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-2\ln|x|-$

$$-\frac{6}{x+1}+C.\Big)$$

2.13. $\int\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2x-\ln|x|-\frac{1}{x}-$

$$-\ln|x+1|+C.\Big)$$

2.14. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$. $\Big($*Ответ:* $x+\frac{1}{x-1}+$
$+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C\Big)$

2.15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x|+\frac{6}{x+1}-$
$-\ln|x+1|+C.\Big)$

2.16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x|-2\ln|x-1|-$
$-\frac{3}{x-1}+C.\Big)$

2.17. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx$. $\Big($*Ответ:* $2x^2-\ln|x|-$
$-3\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C.\Big)$

2.18. $\int \frac{4xdx}{(x^2-1)(x+1)}$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x-1|-\ln|x+1|-$
$-\frac{2}{x+1}+C.\Big)$

2.19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C.\Big)$

2.20. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx$. $\Big($*Ответ:* $x-\ln|x|-$
$-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C.\Big)$

2.21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$. $\Big($*Ответ:* $-\ln|x|-\ln|x-1|-$
$-\frac{3}{x-1}+C.\Big)$

2.22. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx$. $\Big($*Ответ:* $2x+\ln|x|-$
$-\frac{3}{x}-\ln|x+1|+C.\Big)$

2.23. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx$. $\Big($*Ответ:* $x-\ln|x-1|-$
$-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+1|+C.\Big)$

2.24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x|+\ln|x+1|+$
$+\frac{5}{x+1}+C.\Big)$

2.25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x+1| - \right.$

$\left. - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C.\right)$

2.26. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x| + \ln|x-1| + \right.$

$\left. + \frac{2}{x-1} + C.\right)$

2.27. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x+1| - \ln|x| - \right.$

$\left. - \frac{2}{x} + C.\right)$

2.28. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-1| + C.\right)$

2.29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x| + \ln|x-1| - \right.$

$\left. - \frac{3}{x-1} + C.\right)$

2.30. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2x + \ln|x| + \frac{1}{x} + \right.$

$\left. + 2\ln|x+1| + C.\right)$

3

3.1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x-1| - \right.$

$\left. - \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right)$

3.2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2 - \right.$

$\left. - 2x + 4| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x+1| - \right.$

$\left. - \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13| - \operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\right)$

3.4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\left(\text{Ответ: } 3\ln|x-1| - \right.$

$\left. - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - 2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right)$

3.5. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x^2+6x+\right.$

$\left.+13| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.\right)$

3.6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+\right.$

$\left.+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.7. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$. $\left(\text{Ответ: } 2\ln|x+2| -\right.$

$\left.-\ln|x^2-2x+10| + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.\right)$

3.8. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+\right.$

$\left.+13| - \ln|x+1| + 2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\right)$

3.9. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x^2-2x+4| - 2\ln|x+\right.$

$\left.+2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.10. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\left(\text{Ответ: } 3\ln|x-1| +\right.$

$\left.+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right)$

3.11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$. $\left(\text{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+\right.$

$\left.+4| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

3.12. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. $\left(\text{Ответ: } 3\ln|x+2| -\right.$

$\left.-\ln|x^2-2x+10| + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.\right)$

3.13. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| -\right.$

$\left.-2\ln|x+2| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\right)$

3.14. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+1| -$

$- \ln|x^2-4x+13| - \operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\Big)$

3.15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x^2+x+1| - 2\ln|x -$

$- 1| - 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\Big)$

3.16. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x+2| - \ln|x^2 -$

$- 2x+4| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.\Big)$

3.17. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x +$

$+ 10| - \ln|x+2| + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.\Big)$

3.18. $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+1| -$

$- \ln|x^2+6x+13| - 5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.\Big)$

3.19. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1| +$

$+ \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\Big)$

3.20. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x^2-4x +$

$+ 13| - 3\ln|x+1| + 3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C.\Big)$

3.21. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+2| +$

$+ \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10| + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.\Big)$

3.22. $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1| -$

$- \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13| - \operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.\Big)$

3.23. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|+$

$+\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|+3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.\Big)$

3.24. $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+1|-$

$-\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.\Big)$

3.25. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x+2|+\ln|x^2-$

$-2x+4|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

3.26. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1|+$

$+\ln|x^2+2x+5|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\Big)$

3.27. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1|+$

$+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

3.28. $\int \frac{6xdx}{x^3-1}$. $\Big($*Ответ:* $2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|+$

$+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

3.29. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$. $\Big($*Ответ:* $3\ln|x+1|+$

$+\ln|x^2+6x+13|-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.\Big)$

3.30. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$. $\Big($*Ответ:* $\ln|x+2|-$

$-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+10|+\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.\Big)$

4

4.1. $\int \frac{5xdx}{x^4+3x^2-4}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+$

$+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C.\Big)$

4.2. $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|x+1| - x^2 - \right.$
$\left. - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C.\right)$

4.3. $\int \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } x + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,x + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{5}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.4. $\int \frac{5dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+ \right.$
$\left. + 1| - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.5. $\int \frac{x^3 + 8x - 2}{x^4 + 4x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 2\ln|x| + \frac{1}{2x} - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.6. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln|x^2+4| - \frac{1}{x-1} + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.7. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln|x| - \frac{3}{x} - \ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \ln|x+1| + C.\right)$

4.8. $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.9. $\int \frac{x^3 - x - 1}{x^4 - x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x - \right.$
$\left. - 1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.\right)$

4.10. $\int \frac{2x^2 - 7x + 10}{(x-1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \right.$
$\left. - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.11. $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \right.$
$\left. - \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\right)$

4.12. $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^4 + x^2} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C.\right)$

4.13. $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\ln|x^2+4| + C.\right)$

4.14. $\int \frac{2x^5 - 2x^3 + x^2}{1 - x^4} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - x^2 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.15. $\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$ $\left(\text{Ответ: } x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.16. $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x^2+1| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x + C.\right)$

4.17. $\int \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \ln|x| + \frac{3}{4x} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.18. $\int \frac{7x - 2}{(x-1)(x^2+4)} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.19. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.20. $\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \ln|x-1| - \frac{2}{x} - \ln|x+1| + C.\right)$

4.21. $\int \frac{2x^3 - 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$ $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\right)$

4.22. $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$. $\Big($Ответ: $\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.\Big)$

4.23. $\int \frac{x^2dx}{x^4+5x^2+4}$. $\Big($Ответ: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C.\Big)$

4.24. $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}\,dx$. $\Big($Ответ: $\ln|x^2+4| - 2\ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\Big)$

4.25. $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}\,dx$. $\Big($Ответ: $\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\Big)$

4.26. $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36}\,dx$. $\Big($Ответ: $\ln|x^2+9| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\Big)$

4.27. $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}\,dx$. $\Big($Ответ: $\frac{3}{2}\ln|x^2+9| + \ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C.\Big)$

4.28. $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}\,dx$. $\Big($Ответ: $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - x^2 + \ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.\Big)$

4.29. $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$. $\Big($Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + C.\Big)$

4.30. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)}$. $\Big($Ответ: $-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\Big)$

5

5.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$. $\left(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x+3}-4\ln\left|\sqrt{x+3}+2\right|+C.\right)$

5.2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C.\right)$

5.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}-4\sqrt{(x-3)^3}+18\sqrt{x-3}+C.\right)$

5.4. $\int \frac{x\,dx}{2+\sqrt{x+4}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3}-2(x+4)+2\sqrt{x+4}-4\ln\left|\sqrt{x+4}+2\right|+C.\right)$

5.5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7}-\frac{18}{5}\sqrt{(x+1)^5}+9\sqrt{(x+1)^3}-54\sqrt{(x+1)}+C.\right)$

5.6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.\right)$

5.7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3}}\right|+C.\right)$

5.8. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C.\right)$

5.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$. $\left(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt{x}+3\right|+C.\right)$

5.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+3)}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}+C.\right)$

5.11. $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-\right.$

$\left.-4\ln|\sqrt{x}+1|+C.\right)$

5.12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C.\right)$

5.13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C.\right)$

5.14. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x+5}-\right.$

$\left.-6\ln|\sqrt{x+5}+3|+C.\right)$

5.15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-1}-\right.$

$\left.-2\ln|1+\sqrt{x-1}|+C.\right)$

5.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-7}+C.\right)$

5.17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x-1}+\right.$

$\left.+2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C.\right)$

5.18. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-7}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{7}\sqrt{(x-7)^7}+\right.$

$\left.+\frac{6}{5}\sqrt{(x-7)^5}+2\sqrt{(x-7)^3}+2\sqrt{x-7}+C.\right)$

5.19. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-4}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-4)^3}+\right.$

$\left.+2\sqrt{x-4}+C.\right)$

5.20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\sqrt{x+4}-\right.$

$\left.-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+4}+C.\right)$

5.21. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x+2}}$. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7}-\frac{6}{5}\sqrt{(x+2)^5}+\right.$

$\left.+2\sqrt{(x+2)^3}-2\sqrt{(x+2)}+C.\right)$

5.22. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}$. $\left(Ответ:\ 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{10}} + C.\right)$

5.23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$. $\left(Ответ:\ \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.\right)$

5.24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$. (*Ответ:* $2\sqrt{x-2} -$

$- 2\ln|1+\sqrt{x-2}| + C.$)

5.25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$. $\left(Ответ:\ \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.\right)$

5.26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x-2)^3} +$

$+ 8\sqrt{x-2} + C.\Big)$

5.27. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$. $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x-2} -$

$- \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.\Big)$

5.28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{7}\sqrt{(x+6)^7} + \frac{12}{5}\sqrt{(x+6)^5} +$

$+ 8\sqrt{(x+6)^3} + 16\sqrt{x+6} + C.\Big)$

5.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$. (*Ответ:* $2\sqrt{x-6} -$

$- 6\ln|\sqrt{x-6}+3| + C.$)

5.30. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$. (*Ответ:* $2\sqrt{x-8} -$

$- 4\ln|\sqrt{x-8}+2| + C.$)

6

6.1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx$. (*Ответ:* $3\sqrt[3]{x+1} -$

$- \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1| -$

$-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C.$)

6.2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$. (*Ответ:* $x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-$
$-4\sqrt[4]{x}+2\ln|\sqrt{x}+1|+4\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$)

6.3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-$
$-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C.$)

6.4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$. (*Ответ:* $x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+$
$+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+C.$)

6.5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+$
$+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$)

6.6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}(2x+1)+$
$+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C.$)

6.7. $\int \frac{\sqrt{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}$. (*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-1)^7}-$
$-(x-1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}-$
$-3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln|\sqrt[6]{x-1}+1|+C.$)

6.8. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$. (*Ответ:* $(x-1)-$
$-\frac{24}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}+12\sqrt[3]{(x-1)^2}+96\sqrt[3]{x-1}-$
$-384\sqrt[6]{x-1}+768\ln|\sqrt[6]{x-1}+2|+C.$)

6.9. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}$ (*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-(x+3)+$

$+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt{x+3}-3\sqrt[3]{x+3}+$
$+6\sqrt[6]{x+3}-6\ln|\sqrt[6]{x+3}+1|+C.\Big)$

6.10. $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}-$
$-2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6\ln|\sqrt[6]{x-1}+$
$+1|+C.\Big)$

6.11. $\int\frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-$
$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}+2\sqrt{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}-$
$-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C.\Big)$

6.12. $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-$
$-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln|\sqrt[3]{x}+1|-$
$-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.13. $\int\frac{\sqrt[6]{x+3}\,dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}-$
$-2\sqrt{x+3}+3\sqrt[3]{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}+6\ln|\sqrt[6]{x+3}+$
$+1|+C.\Big)$

6.14. $\int\frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\,dx$.
$\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.\Big)$

6.15. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}\,dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}-$
$-6\sqrt[6]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\Big)$

6.16. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{3}(3x+1)-$
$-\frac{4}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+2\sqrt[3]{(3x+1)^2}-4\sqrt{3x+1}+$
$+12\sqrt[3]{3x+1}-48\sqrt[6]{3x+1}+96\ln|\sqrt[6]{3x+1}+$
$+2|+C.\Big)$

6.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+$
$+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C.\Big)$

6.18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$
$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}+9\sqrt[3]{x}+30\sqrt[6]{x}+$
$+\frac{54}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt[6]{x}-1+\sqrt{5}}\right|+24\ln|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-$
$-1|+C.\Big)$

6.19. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$ $\Big($*Ответ:* $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-$
$-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln|1-\sqrt[4]{x}|+C.\Big)$

6.20. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$ $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+$
$+\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}+4\sqrt[6]{3x+1}+$
$+4\ln|\sqrt[6]{3x+1}-1|+C.\Big)$

6.21. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}.$ $\Big($*Ответ:* $2\sqrt{x}+24\sqrt[6]{x}+$
$+24\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+C.\Big)$

6.22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{2}x^{2/3}+6x^{1/6}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\right)$

6.23. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}.$ $\left(\textit{Ответ: } 2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\right)$

6.24. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{9x}+C.\right)$

6.25. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}.$ $\left(\textit{Ответ: } 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+C.\right)$

6.26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C.\right)$

6.27. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln|\sqrt[4]{x}+1|+C.\right)$

6.28. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\,dx.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln|\sqrt[6]{3x+1}+1|+C.\right)$

6.29. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}.$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.\right)$

6.30. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - \right.$
$-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|+$
$\left.+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.\right)$

7

7.1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}}+\right.$
$\left.+C.\right)$

7.2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$.
$\left(\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tg}\,(x/2)-4}{\sqrt{5}}+C.\right)$

7.3. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\right.$
$\left.+3\ln\left|\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}+1\right|-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C.\right)$

7.4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-4}{\mathrm{tg}\,(x/2)-1}\right|+C.\right)$

7.5. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$.
$\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-2-\sqrt{5}}{\mathrm{tg}\,(x/2)-2+\sqrt{5}}\right|+C.\right)$

7.6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-1}{2}+C.\right)$

7.7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)+C.\right)$

7.8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-5}{\mathrm{tg}\,(x/2)-3}\right|+C.\right)$

7.9. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,(x/2)-2}{\mathrm{tg}\,(x/2)+2}\right|+C.\right)$

7.10. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left|2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\right.\right.$
$\left.\left.+3\right|+C.\right)$

7.11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. (*Ответ*: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}(x/2)+4}{3}+C$.)

7.12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$. (*Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C$.)

7.13. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. (*Ответ*: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}{\operatorname{tg}(x/2)+2}\right|+C$.)

7.14. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ}:\ \frac{1}{\sqrt{58}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+7-\sqrt{58}}{3\operatorname{tg}(x/2)+7+\sqrt{58}}\right|+C.\right)$$

7.15. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ}:\ -\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-4-\sqrt{21}}{\operatorname{tg}(x/2)-4+\sqrt{21}}\right|+C.\right)$$

7.16. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

$$\left(\textit{Ответ}:\ -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\operatorname{tg}(x/2)-1/2}\right|+C.\right)$$

7.17. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}\,dx$. (*Ответ*: $3x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-$

$$-\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+C.)$$

7.18. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

$$\left(\textit{Ответ}:\ \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{15}}+C.\right)$$

7.19. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$. (*Ответ*: $C-\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}$.)

7.20. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}\,dx$. (*Ответ*: $12\operatorname{tg}\frac{x}{2}+$

$$+6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-5x+C.)$$

7.21. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$.

$$\left(\textit{Ответ}:\ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{7}}+C.\right)$$

7.22. $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1+\cos x}\,dx$. $\left(\text{Ответ: } 6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| - \right.$

$\left. - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + C.\right)$

7.23. $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } C - \right.$

$\left. - \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2) - 1/3}{\operatorname{tg}(x/2)+3}\right|.\right)$

7.24. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{2} + C.\right)$

7.25. $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+2-\sqrt{13}}{3\operatorname{tg}(x/2)+2+\sqrt{13}}\right| + C.\right)$

7.26. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \right.\right.$

$\left.\left. + 3\right| + C.\right)$

7.27. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} + C.\right)$

7.28. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-7}{\operatorname{tg}(x/2)-1}\right| + C.\right)$

7.29. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}(x/2)+3+\sqrt{10}}\right| + C.\right)$

7.30. $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

$\left(\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{5\operatorname{tg}(x/2)+1-\sqrt{6}}{5\operatorname{tg}(x/2)+1+\sqrt{6}}\right| + C.\right)$

8

8.1. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x\cos x}$. $\left(\text{Ответ: } \frac{1}{16}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}x}\right| + C.\right)$

8.2. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x\cos x}$.

$\left(Ответ:\ \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-1}{2\,\mathrm{tg}\,x}\right| + C.\right)$

8.3. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{2} + C.\right)$

8.4. $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$. $\Big(Ответ:\ \ln|\mathrm{tg}^2 x + 2| +$

$+ \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}} + C.\Big)$

8.5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

$\left(Ответ:\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

8.6. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{ctg}^2 x}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{4}\ln|\mathrm{tg}^4 x - 1| + C.\right)$

8.7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$.

$\left(Ответ:\ \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{5}}\right| + C.\right)$

8.8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$.

$\left(Ответ:\ \frac{1}{\sqrt{14}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$. $(Ответ:\ \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}^2 x) + C.)$

8.10. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x} + \ln|\mathrm{tg}\,x| + C.\right)$

8.11. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C.\right)$

8.12. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x\cos x}$.

$\left(Ответ:\ \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x+2}\right| + C.\right)$

8.13. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$. $\left(Ответ:\ \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(2\,\mathrm{tg}^2 x) + C.\right)$

8.14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C$.)

8.15. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C.\right)$

8.16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg} x}\right| + C.\right)$

8.17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{2}} + C.\right)$

8.18. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{5}\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}\right| + C.\right)$

8.19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}}\right| + C.\right)$

8.20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.\right)$

8.21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.\right)$

8.22. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.23. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.\right)$

8.24. $\int \frac{3\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{3}{2} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.\right)$

8.25. $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.\right)$

8.26. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.\right)$

8.27. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x\sqrt{\ } -$
$- 1) + C.$)

8.28. $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + C.\right)$

8.29. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}^2 x + 3| + C.\right)$

8.30. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x}\,dx$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{3}\operatorname{tg} x +$
$+ \frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x) + C.\Big)$

9

9.1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x +$
$+ \frac{1}{144}\sin^3 6x + C.\Big)$

9.2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x dx$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9 x} -$
$- \frac{5}{19}\sqrt[5]{\sin^{19} x} + C.\Big)$

9.3. $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + C.\right)$

9.4. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\right)$

9.5. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ C - 3\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} -$
$- \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}.\Big)$

9.6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x} -$
$- \frac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x} + C.\Big)$

9.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$. $\Big(\text{\textit{Ответ:}}\ 3\sqrt[3]{\sin x} -$
$- \frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + C.\Big)$

9.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } 3\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.\right)$

9.9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{3}{\cos x} + C.\right)$

9.10. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{7}\cos^7 x - \right.$

$\left. - \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C\right)$

9.11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{12}\sqrt[5]{\cos^{12} x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{2}\sqrt[5]{\cos^2 x} + C.\right)$

9.12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{11}\sqrt[3]{\cos^{11} x} - \right.$

$\left. - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.\right)$

9.13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \right.$

$\left. - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C.\right)$

9.14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{36}\sqrt[5]{\cos^{18} 2x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{16}\sqrt[5]{\cos^8 2x} + C.\right)$

9.15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{2}\sqrt[5]{\sin^2 x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{12}\sqrt[5]{\sin^{12} x} + C.\right)$

9.16. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{16}x - \right.$

$\left. - \frac{1}{128}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin^3 4x + C.\right)$

9.17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x} - \right.$

$\left. -3\sqrt[3]{\cos x} + C.\right)$

9.18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x}\sin^3 x dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{5}{19}\sqrt[5]{\cos^{19} x} - \right.$

$\left. - \frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^9 x} + C.\right)$

9.19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + C.\Big)$

9.20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\sin 2x} - \frac{3}{14} \sqrt[3]{\sin^7 2x} + C.\Big)$

9.21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{14} \sqrt[3]{\cos^7 2x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\cos 2x} + C.\Big)$

9.22. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.\Big)$

9.23. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\Big)$

9.24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\Big)$

9.25. $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C.\Big)$

9.26. $\int \frac{3 \cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ $\Big($*Ответ:* $\frac{3}{\sin x} - \frac{1}{\sin^3 x} + C.\Big)$

9.27. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x}\, dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{5}{9} \sqrt[5]{\cos^{18} x} - \frac{5}{8} \sqrt[5]{\cos^8 x} - \frac{5}{28} \sqrt[5]{\cos^{28} x} + C.\Big)$

9.28. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.\Big)$

9.29. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C.\Big)$

9.30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.\right)$

Решение типового варианта

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)}\,dx$.

▶ Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь. Разложим ее знаменатель на множители: $(x+1)(x-2)(x-3)$. Согласно формуле (8.9), в разложении правильной дроби на простейшие каждому множителю знаменателя вида $x - a$ соответствует слагаемое $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае имеем

$$\frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)} = \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \\ = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители дробей, получим тождество

$$7x - x^2 - 4 \equiv A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + \\ + C(x+1)(x-2).$$

Коэффициенты A, B, C определим с помощью метода частных значений (см. § 8.6):

$$\left.\begin{array}{l|r} x = -1 & -12 = 12A, \\ x = 2 & 6 = -3B, \\ x = 3 & 8 = 4C, \end{array}\right\}$$

откуда $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$. Подставив найденные коэффициенты в разложение подынтегральной функции на простейшие дроби, получим

$$\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right)dx = \\ = -\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C^* = \\ = \ln\frac{(x-3)^2}{|x+1|\,(x-2)^2} + C^*,$$

где C^* — постоянная интегрирования. ◀

$$2. \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx.$$

$$\blacktriangleright \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx = \int \frac{15x - x^2 - 11}{(x-1)^2(x+2)}\,dx \overset{(8.9)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.9)}{=\!=} \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \right) dx \overset{\S 8.6}{=\!=}$$

$$\overset{\S 8.6}{=\!=} \left| \begin{array}{l|ll} \multicolumn{3}{l}{15x - x^2 - 11 \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2,} \\ x = 1 & 3 = 3B, & B = 1, \\ x = -2 & -45 = 9C, & C = -5, \\ x^2 & -1 = A + C, & A = 4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{x+2} \right) dx =$$

$$= 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 5 \ln|x+2| + C^*.$$

Ответим, что для нахождения коэффициентов мы использовали комбинированный метод: метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов (см. § 8.6). ◀

$$3.\ I(x) = \int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27}{(x-2)(x^2-2x+5)}\,dx.$$

▶ Так как подынтегральная функция является неправильной дробью, то путем деления числителя на знаменатель можно представить ее в виде суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби:

$$I(x) = \int \left(x - 4 + \frac{-2x^2 + 3x - 13}{(x+2)(x^2-2x+5)} \right) dx \overset{\S 8.6}{=\!=} \frac{x^2}{2} - 4x +$$

$$+ \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l|ll} \multicolumn{3}{l}{-2x^2 + 3x - 13 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x-2),} \\ x = 2 & -15 = 5A, & A = -3, \\ x^2 & -2 = A + B, & B = 1, \\ x^0 & -13 = 5A - 2C, & C = -1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \left(\frac{-3}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-2x+5} \right) dx =$$

$$= -3 \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 5| + C^*. \blacktriangleleft$$

$$4. \int \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 32}{x^4 + 9x^2 + 20}\,dx.$$

$$\blacktriangleright \int \frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}\,dx = \int \frac{2x \;-5x^2+8x-22}{(x^2+4)(x^2+5)}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+5} \right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2x^3-5x^2+8x-22 \equiv (Ax+B)(x^2+5)+ \\ \qquad\qquad +(Cx+D)(x^2+4), \\ \begin{array}{l|r} x^3 & 2 = A + C, \\ x^2 & -5 = B + D, \\ x & 8 = 5A + 4C, \\ x^0 & -22 = 5B + 4D, \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}} \right\} \begin{array}{l} A = 0,\ B = -2, \\ C = 2,\ D = -3 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x^2+4} + \frac{2x-3}{x^2+5} \right) dx = -\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln(x^2+5) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C^*. \blacktriangleleft$$

5. $\displaystyle\int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{x+1}{3-\sqrt{x-2}}\,dx \overset{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t,\ x-2 = t^2, \\ x = t^2+2,\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= -2\int \frac{(t^2+3)t\,dt}{t-3} = -2\int \left(t^2 + 3t + 12 + \frac{36}{t-3} \right) dt =$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 12t + 36\ln|t-3| \right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} - 3(x-2) - 24\sqrt{x-2} -$$

$$- 72\ln\left|\sqrt{x-2}-3\right| + C. \blacktriangleleft$$

6. $\displaystyle\int \frac{4\sqrt{x-2}+\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}\,dx \overset{\S 8.7}{=}$$

$$\overset{\S 8.7}{=} \left| \begin{array}{l} m = \text{НОК}(2,\ 3,\ 6) = 6,\ x-2 = t^6, \\ x = t^6+2,\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(4t^3-t)6t^5\,dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}\,dt =$$

$$= 6\int \left(4t^5 - 8t^4 + 15t^3 - 30t^2 + 60t - 120 + \frac{240}{t+2} \right) dt =$$

$$=6\left(\frac{2}{3}t^6-\frac{8}{5}t^5+\frac{15}{4}t^4-10t^3+30t^2-120t+\right.$$

$$\left.+240\ln|t+2|\right)+C=4(x-2)-\frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5}+$$

$$+\frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-60\sqrt{x-2}+180\sqrt[3]{x-2}-$$

$$-720\sqrt[6]{x-2}+1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right|+C \blacktriangleleft$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}$.

$$\blacktriangleright \int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}\overset{(8.13)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.13)}{=\!=}\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ x=2\operatorname{arctg}t \end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2}=2\int\frac{dt}{3t^2+6t-1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+2t-1/3}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^2-4/3}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{t+1-2/\sqrt{3}}{t+1+2/\sqrt{3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}+2}\right|+C. \blacktriangleleft$$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin^2x-\sin 2x+3\cos^2x}$

$$\blacktriangleright \int\frac{dx}{2\sin^2x-\sin 2x+3\cos^2x}\overset{(8.14)}{=\!=}$$

$$\overset{(8.14)}{=\!=}\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}x,\ \sin^2x=\dfrac{x^2}{1+t^2},\ \cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}, \\ \sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2},\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{2t^2-2t+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+3/2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5/4}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t-1/2}{\sqrt{5}/2}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{5}}+C. \blacktriangleleft$$

9. $\int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\,dx.$

$$\blacktriangleright \int \frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}\,dx \overset{(8.15)}{\underset{(8.16)}{=\!=}} \left| \begin{array}{l} \sin 4x = t, \\ dx = 4\cos 4x dx \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[5]{t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(t^{-1/5} - t^{9/5}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}t^{4/5} - \frac{5}{14}t^{14/5}\right) + C =$$

$$= \frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x} - \frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x} + C. \blacktriangleleft$$

8.10. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 8

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ $\left(Ответ:\ \frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C.\right)$

2. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$

$\left(Ответ:\ \frac{1}{4\sqrt{15}} \ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C.\right)$

3. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ $\left(Ответ:\ \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3x)^3} + C.\right)$

4. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$ $(Ответ:\ x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.)$

5. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx.$ $\left(Ответ:\ x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.\right)$

6. $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ $\left(Ответ:\ \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.\right)$

7. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx.$ $(Ответ:\ 2\sqrt{x+1}(\ln|x+1| - 2) + C.)$

8. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ $(Ответ:\ 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.)$